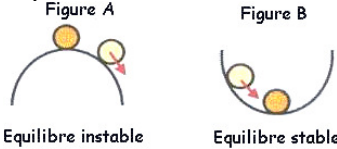


Oscillateurs Mécaniques : Pendule Elastique



Oscillateur mécanique : Tout mobile qui effectue un mouvement de va et viens autour de sa position d'équilibre stable



Nous déplaçons légèrement la bille de sa position d'équilibre,

- **La figure A :** elle se met à rouler et ne reviendra pas à sa position de départ. L'équilibre est instable.
- **La figure B :** elle revient dans sa position de départ. L'équilibre est dit stable.

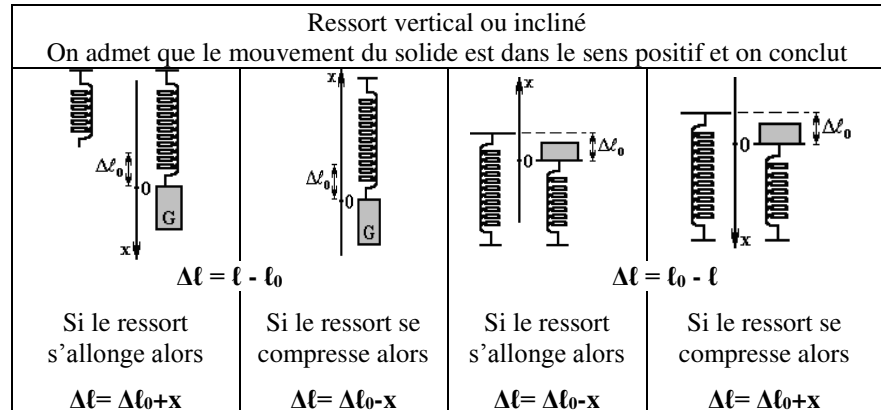
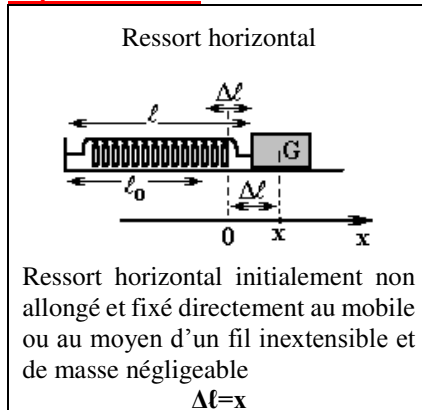
I. Pendule Elastique

Un pendule élastique, ou **système solide-ressort**, est constitué d'un solide, de masse m , fixé à un ressort, de longueur initiale ℓ_0 et de raideur K , dont l'autre extrémité est attachée à un point fixe.

1. La Tension de ressort

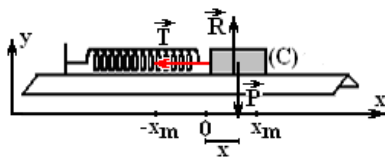
$T = K \cdot \Delta \ell$ Tension du ressort (N)	$\Delta \ell = \ell - \ell_0$ Allongement du ressort (m)	ℓ_0 Longueur initiale ℓ_0 (m)	K Raideur du ressort (N/m)
---	---	--	---------------------------------

Expression de $\Delta \ell$



2. Equation différentielle :

Un solide, de masse m sur un banc à coussin d'air horizontal, fixé à un ressort à spires non jointives, de longueur initiale ℓ_0 et de raideur K ,



Système : Solide (C)

Bilan des forces :

- $\vec{T}$: Tension du ressort
- $\vec{R}$: Réaction du plan horizontal
- $\vec{P}$: Poids du corps (C)

En appliquant la 2^{ème} loi de Newton : $\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}_G$

$$\vec{T} + \vec{R} + \vec{P} = m \cdot \vec{a}_G$$

$$\vec{T} \begin{pmatrix} T_x = -T \\ T_y = 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{P} \begin{pmatrix} P_x = 0 \\ P_y = -P = -m \cdot g \end{pmatrix} \text{ et } \vec{R} \begin{pmatrix} R_x = 0 \\ R_y = R \end{pmatrix} \text{ et } \vec{a}_G \begin{pmatrix} a_x = \ddot{x} \\ a_y = 0 \end{pmatrix}$$

Sur l'axe Ox : $T_x + R_x + P_x = m \cdot a_x$

$$-T = m \cdot \ddot{x} \text{ et } -K \cdot \Delta \ell = m \cdot \ddot{x} \text{ et } -K \cdot x = m \cdot \ddot{x} \text{ d'où } -\frac{K}{m} \cdot x = \ddot{x}$$

donc $\ddot{x} + \frac{K}{m} \cdot x = 0$: Equation différentielle de mouvement du centre d'inertie G

L'équation différentielle est de la forme $\ddot{x} + \omega_0^2 \cdot x = 0$ avec $\omega_0^2 = \frac{K}{m}$ ou bien $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$ (en rad/s)

3. Equation horaire ou la solution de l'equation différentielle :

$$x = x(t) = X_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi\right)$$

ou bien

$$x = x(t) = X_m \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi)$$

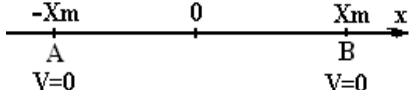
$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

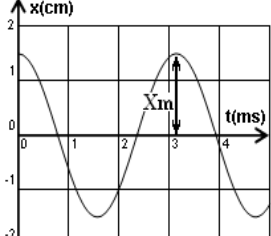
avec

$x(t)$: l'abscise (élongation) du point G et varie entre X_m et $-X_m$
 X_m : Amplitude ou élongation maximale
 ω_0 : pulsation (rad/s)
 T_0 : la période (s)
 $\omega_0 \cdot t + \varphi$: Phase à l'instant t
 φ : Phase à l'origine des temps $t=0$

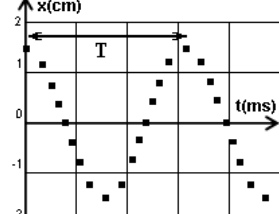
Déterminer les constantes X_m , T_0 et φ :

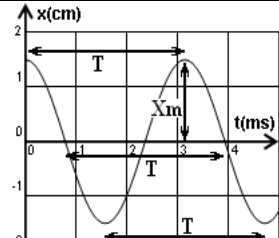
Comment déterminer X_m

1. <u>Phrase</u>	 - On écarte le corps de 2cm de sa position d'équilibre et on le libère sans vitesse initiale $X_m = 2\text{cm}$ - Le corps oscille entre deux points A et B distante de $AB = 4\text{cm}$ $X_m = 2\text{cm}$ d'où $AB = 2.X_m = 4\text{cm}$
------------------	--

2. <u>Graphiquement</u>	2.1. <u>Par rapport à l'axe temps</u>  $X_m = 1.5\text{cm}$
-------------------------	--

Comment déterminer la période propre T_0

3. <u>Enregistrement</u>	 τ : la durée entre l'enregistrement de deux points successifs $T = 16.\tau$
--------------------------	---

4. <u>Graphiquement $x=f(t)$</u>	 Attention à la lecture et à l'échelle $T_0 = 3.2\text{ms}$
---	---

Comment déterminer la phase à l'origine φ

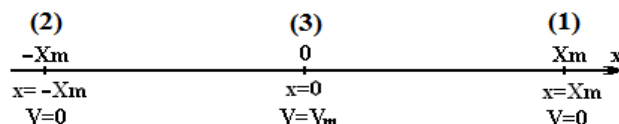
$x = x(t) = X_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi\right)$: l'équation horaire $V_x = \dot{x}(t) = -X_m \cdot \frac{2\pi}{T_0} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi\right)$

l'expression de la composante du vecteur vitesse V_x et $\sin\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi\right)$ sont opposées (ont des signes différents)

$x_0 = x(0) = X_m \cdot \cos(\varphi)$ d'où $\cos(\varphi) = \frac{x(0)}{X_m}$ à l'instant $t=0$ $V_{0x} = V(0) = \dot{x}(0) = -X_m \cdot \frac{2\pi}{T_0} \cdot \sin(\varphi)$

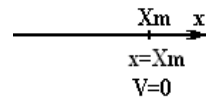
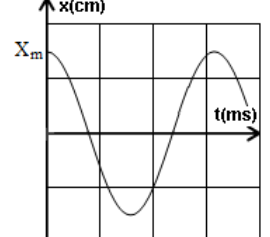
V_x à l'instant $t=0$ et $\sin(\varphi)$ sont opposées (ont des signes différents) On en conclut que V_x à l'instant $t=0$ et φ sont opposées aussi

En comparant le sens de mouvement avec le sens positif de l'axe, on détermine le signe de V_x la composante de la vitesse et on en déduit le signe de la phase φ



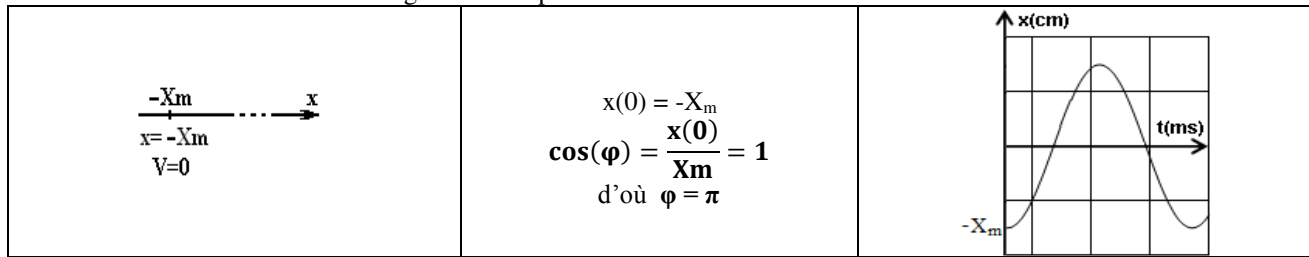
1^{er} cas :

- (1) On écarte le corps, dans le sens positif, de X_m de sa position d'équilibre et on le libère sans vitesse initiale à un instant considéré comme origine des temps

	$x(0) = X_m$ $\cos(\varphi) = \frac{x(0)}{X_m} = 1$ d'où $\varphi = 0$	
---	--	---

2^{em} cas :

- (2) On écarte le corps, dans le sens négatif, de X_m de sa position d'équilibre et on le libère sans vitesse initiale à un instant considéré comme origine des temps



4. Expression de la période propre T_0 :

$$x = x(t) = X_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi\right) : \text{l'équation horaire}$$

On dérive deux fois par rapport au temps t :

$$\dot{x} = -x_m \frac{2\pi}{T_0} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi_0\right) \quad \ddot{x} = -x_m \frac{4\pi^2}{T_0^2} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi_0\right) = -\frac{4\pi^2}{T_0^2} \cdot x \quad \ddot{x} + \frac{4\pi^2}{T_0^2} \cdot x = 0$$

On compare cette expression avec l'équation différentielle, on déduit que pour que soit une solution de l'équation différentielle,

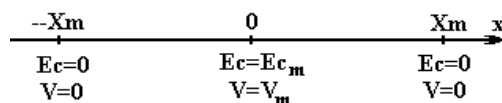
$$x(t) = x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi_0\right) \quad \text{il suffit que} \quad \frac{4\pi^2}{T_0^2} = \frac{K}{m} \quad \boxed{T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}}}$$

I. Etude Energétique

Energie du système est la somme des énergies de ses composantes

1. Energie cinétique :

$$x = X_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi\right) \quad \text{et} \quad V_x = -X_m \cdot \frac{2\pi}{T_0} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi\right) \quad \text{et} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{K}{m}} \quad E_c = \frac{1}{2} m \cdot V^2$$



- Si $x = X_m$ ou $x = -X_m$ alors l'énergie cinétique est nulle donc la vitesse est nulle et l'oscillateur s'arrête et change le sens de son mouvement
- Si $x = 0$ alors l'oscillateur passe par sa position d'équilibre et son énergie cinétique est maximale et sa vitesse l'est aussi

2. Energie potentielle :

L'énergie potentielle (de position), définie à une constante arbitraire près, ne dépend que de la position du corps dans l'espace.

❖ Energie potentielle élastique E_{pe}

$$E_{pe} = \frac{1}{2} \cdot K \cdot \Delta \ell^2 + C$$

La constante C est déterminé à partir d'un cas référentiel de l'énergie potentielle $E_{pe}=0$

Si le pendule élastique est horizontal alors $\Delta \ell = x$ alors

$$E_{pe} = \frac{1}{2} \cdot K \cdot x^2 + C$$

On considère le plan vertical passant par la position d'équilibre comme repère de l'énergie potentielle élastique

$x=0$ et $E_{pe}=0$ d'où $C=0$ alors

$$E_{pe} = \frac{1}{2} \cdot K \cdot x^2$$

❖ Energie potentielle de pesanteur E_{pp}

$$E_{pp} = m \cdot g \cdot Z + C$$

La constante C est déterminé à partir d'un cas référentiel de l'énergie potentielle $E_{pp}=0$

On considère le plan vertical passant par la position d'équilibre comme repère de l'énergie potentielle élastique $z=0$ et $E_{pp}=0$ d'où $C=0$ alors

$$E_{pp} = m \cdot g \cdot Z$$

NB :

Pour un pendule élastique horizontal $E_{pp}=0$

$$\text{Conclusion : } E_p = \frac{1}{2} \cdot K \cdot x^2$$

$$\text{On a } x = X_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi\right) \text{ alors } E_p = \frac{1}{2} K \cdot X_m^2 \cdot \cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi\right)$$

3. Expression de la variation de l'énergie potentielle :

ΔE_{pe} : Variation de l'énergie potentielle élastique

$$\Delta E_{pe} = \frac{1}{2} \cdot K \cdot (\Delta \ell_2^2 - \Delta \ell_1^2) = -W_{1 \rightarrow 2}(\vec{T})$$

ΔE_{pp} : Variation de l'Energie potentielle de pesanteur

$$\Delta E_{pp} = m \cdot g \cdot (Z_2 - Z_1) = -W_{1 \rightarrow 2}(\vec{P})$$

4. Energie mécanique :

L'énergie mécanique est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle, $E_m = E_c + E_p$

$$E_m = \frac{1}{2} \cdot m \cdot V^2 + \frac{1}{2} \cdot K \cdot x^2 + C \quad \text{Pour les conditions décrites avant on peut écrire} \quad E_m = \frac{1}{2} \cdot m \cdot V^2 + \frac{1}{2} \cdot K \cdot x^2$$

5. Le cas du pendule élastique incliné ou vertical

X : la distance que parcourt le corps sur le plan incliné et elle constitue l'hypoténuse du triangle

Les deux axes sont opposés et

$$Z = -X \cdot \sin(\alpha)$$

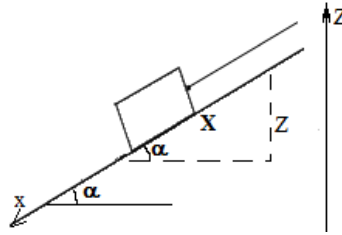
NB : si on change l'orientation de l'axe z

- L'expression de l'énergie potentielle varie

$$E_{p_p} = E_{p_p}(Z) = -m \cdot g \cdot Z + C$$

- La relation entre abscisse varie aussi

$$Z = X \cdot \sin(\alpha)$$



$$1. \quad E_{p_p} = E_{p_p}(Z) = m \cdot g \cdot Z + C$$

- Déterminer l'expression de la constante C

- Déterminer le plan horizontal référentielle de l'énergie potentielle $E_{p_p} = 0$

- Déterminer l'abscisse correspondant Z_0

$$Z = Z_0 \text{ et } E_{p_p}(Z_0) = 0$$

D'où

$$E_{p_p}(Z_0) = m \cdot g \cdot Z_0 + C = 0$$

donc

$$C = -m \cdot g \cdot Z_0$$

- On remplace C par son équivalent et on obtient alors

$$E_{p_p} = E_{p_p}(Z) = m \cdot g \cdot Z - m \cdot g \cdot Z_0$$

$$E_{p_p} = E_{p_p}(Z) = m \cdot g \cdot (Z - Z_0)$$

Energie potentielle élastique

$$1. \quad E_{p_e} = \frac{1}{2} \cdot K \cdot \Delta \ell^2 + C$$

Déterminer l'expression de $\Delta \ell$ en fonction de x soit $\Delta \ell = \Delta \ell_0 + x$

- Déterminer la constante C

- Déterminer le plan référentiel de l'Energie potentielle $E_{p_e} = 0$

- Déterminer l'abscisse correspondant x_0

$$x = x_0 \text{ et } E_{p_e}(x_0) = 0$$

$$\text{D'où } E_{p_e}(x_0) = \frac{1}{2} \cdot K \cdot (\Delta \ell_0 + x_0)^2 + C = 0$$

$$\text{Donc } C = -\frac{1}{2} \cdot K \cdot (\Delta \ell_0 + x_0)^2$$

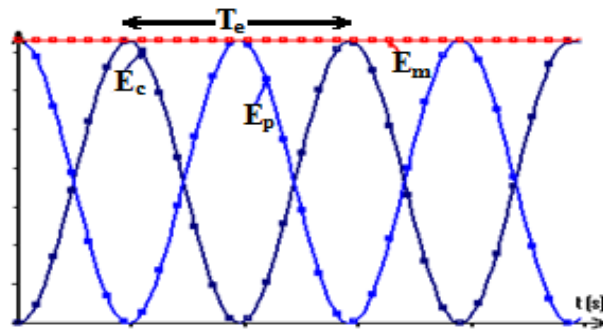
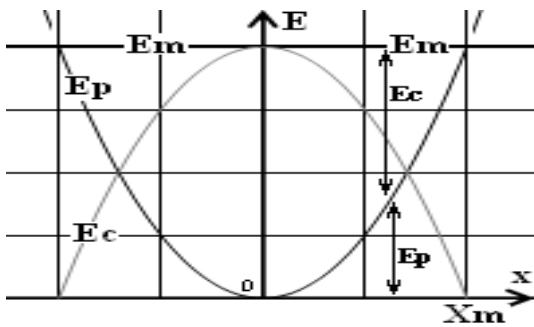
- Remplacer dans l'expression de E_{p_e}

$$E_{p_e} = \frac{1}{2} \cdot K \cdot \Delta \ell^2 + C = \frac{1}{2} \cdot K \cdot (\Delta \ell_0 + x_0)^2 + C$$

6. Les graphes d'énergies :

- Au point $x = X_m$ on a $E_m = E_{p_{\max}}$

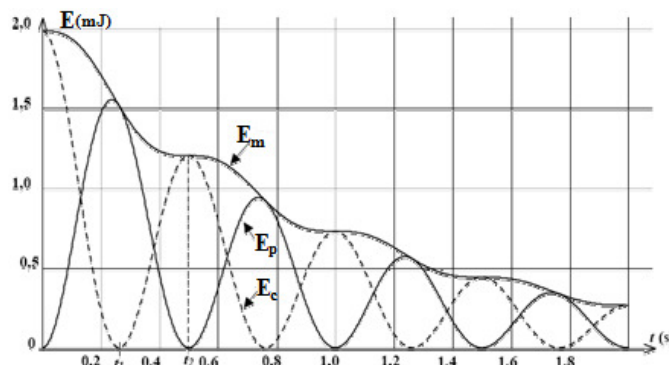
- Au passage par la position d'équilibre $x = 0$ on a $E_m = E_{c_{\max}}$



$T_0 = 2 \cdot T_e$: La période des oscillations T_0 est le double de la période des énergies T_e

NB :

S'il existe frottement alors l'amplitude des oscillations diminue par dissipation (perte) de l'énergie mécanique au cours du temps



EXERCICE 1

Deuxième situation

On relie un corps solide (S_2), de masse $m_2 = 182 \text{ g}$, à un ressort à spires non jointive, de masse négligeable et de raideur K , et on fixe l'autre bout du ressort à un support fixe (figure 2).

Le corps (S_2) peut glisser sans frottement sur un plan horizontal.

On écarte le corps (S_2) de sa position d'équilibre de la distance X_m et on le libère sans vitesse initiale.

Pour étudier le mouvement de G_2 , on choisit le référentiel galiléen ($O, \vec{i}$) tel que la position de G_2 à l'origine des dates est confondue avec l'origine O .

On repère la position de G_2 à l'instant t par l'abscisse x dans le repère ($O, \vec{i}$).

L'équation différentielle du mouvement de G_2 s'écrit : $\ddot{x} + \frac{K}{m_2} x = 0$ et sa solution est de la forme $x(t) = X_m \cos(\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi)$.

L'étude expérimentale du mouvement de G_2 a permis d'obtenir le graphe représenté sur la figure 3.

2-1- Déterminer en exploitant le graphe les grandeurs suivantes :

l'amplitude X_m , la période T_0 et φ la phase à l'origine des dates. (0,75 pt)

2-2- En déduire la raideur K du ressort. (0,75 pt)

2-3- On choisit le plan horizontal passant par la position de G_2 à l'équilibre comme origine de l'énergie potentielle de pesanteur et l'état où le ressort n'est pas déformé comme origine de l'énergie potentielle élastique.

2-3-1- Montrer que l'énergie cinétique E_C du corps (S_2) s'écrit : $E_C = \frac{K}{2} (X_m - x)^2$. (0,75 pt)

2-3-2- Trouver l'expression de l'énergie mécanique du système { corps S_2 - ressort } en fonction de X_m et K et en déduire la vitesse v_{G_2} lorsque G_2 passe par la position d'équilibre dans le sens positif.

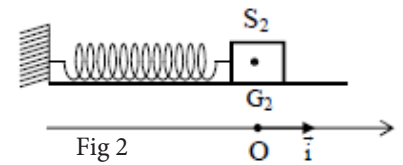


Fig 2

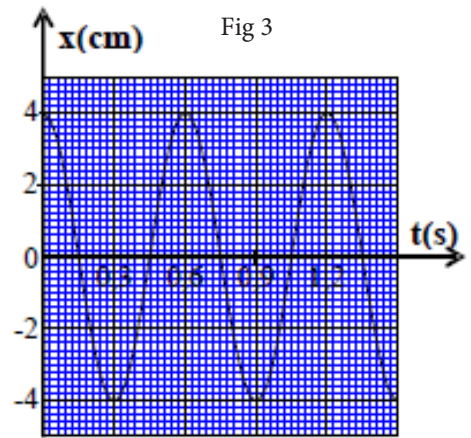


Fig 3

EXERCICE 2

Les ressorts se trouvent dans plusieurs appareils mécaniques, comme les voitures et les bicyclettes ... et produisent des oscillations mécaniques.

Cette partie a pour objectif, l'étude énergétique d'un système oscillant (corps solide - ressort) dans une position horizontale.

Soit un oscillateur mécanique horizontal composé d'un corps solide (S) de masse m et de centre d'inertie G fixé à l'extrémité d'un ressort à spires non jointives et de masse négligeable et de raideur $K = 10 \text{ N.m}^{-1}$.

L'autre extrémité du ressort est fixée à un support fixe.

Le corps (S) glisse sans frottement sur le plan horizontal.

On étudie le mouvement de l'oscillateur dans le repère ($O, \vec{i}$) lié à la Terre et dont l'origine est confondue avec la position de G à l'équilibre de (S).

On repère la position de G à l'instant t par son abscisse x . (Figure 4)

On écarte le corps (S) horizontalement de sa position d'équilibre dans le sens positif d'une distance X_0 et on le libère sans vitesse initiale à l'instant pris comme origine des dates.

On choisit le plan horizontal passant par G comme référence de l'énergie potentielle de pesanteur, et l'état dans lequel le ressort n'est pas déformé comme référence de l'énergie potentielle élastique.

A l'aide d'un dispositif informatique adéquat, on obtient les deux courbes représentant les variations de l'énergie E_C cinétique et l'énergie potentielle élastique E_{pe} du système oscillant en fonction du temps. (Figure 5)

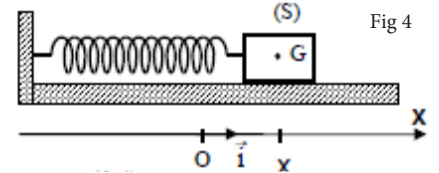


Fig 4

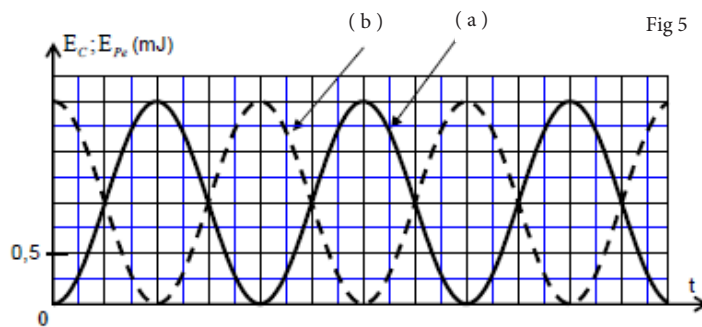


Fig 5

1- Indiquer parmi les courbes (a) et (b) celle qui représente les variations de l'énergie cinétique E_C . justifier votre réponse.

2- Déterminer la valeur de l'énergie mécanique E_m du système oscillant.

3- En déduire la valeur de la distance X_0 .

4- En considérant la variation de l'énergie potentielle élastique du système oscillant, trouver le travail $W_{A \rightarrow O}(\vec{T})$ de la force de rappel $\vec{T}$ exercée par le ressort sur (S) lors du déplacement de G de la position A d'abscisse $x_A = X_0$ vers la position O .

EXERCICE 3

Partie II : Étude énergétique d'un oscillateur mécanique (solide-ressort)

Un système oscillant est constitué d'un solide (S), de centre d'inertie G et de masse m , et d'un ressort horizontal, à spires non jointives, de masse négligeable et de raideur $K = 20 \text{ N.m}^{-1}$.

Le solide (S) est accroché à l'une des deux extrémités du ressort, l'autre extrémité est fixée à un support immobile.

On écarte le solide (S) de sa position d'équilibre d'une distance X_m puis on le lâche sans vitesse

initiale. Le solide (S) oscille sans frottements sur un plan horizontal (figure 1)

On étudie le mouvement du centre d'inertie G dans un repère ($O, \vec{i}$) lié à un référentiel terrestre considéré comme galiléen. L'origine O de l'axe coïncide avec la position de G lorsque le solide (S) est à l'équilibre.

On repère, dans le repère ($O, \vec{i}$) la position de G à un instant t par l'abscisse x .

On choisit le plan horizontal passant par G comme référence de l'énergie potentielle de pesanteur et l'état où G est à la position d'équilibre ($x=0$) comme référence de

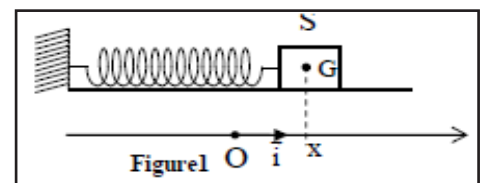


Figure 1

l'énergie potentielle élastique.

L'équation horaire du mouvement de G s'écrit sous forme : $x(t) = X_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right)$.

La courbe de la figure 2 représente le diagramme des espaces $x(t)$.

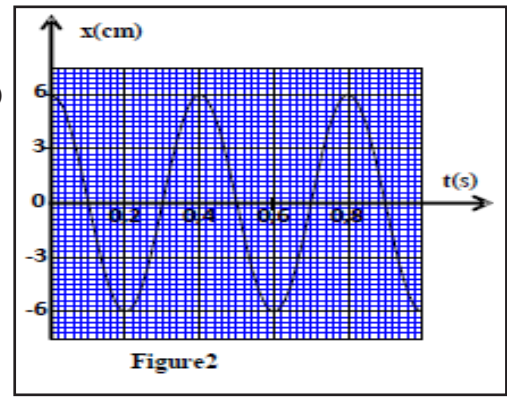
1- Déterminer les valeurs de X_m , T_0 et de φ .

2- Déterminer la valeur de l'énergie mécanique E_m de l'oscillateur étudié. (0,75 pt)

3- Trouver la valeur de l'énergie cinétique E_{Cl} de l'oscillateur mécanique à l'instant $t_1 = 0,3s$.

4- Calculer le travail $W_{AB}(F)$ de la force de rappel lorsque le centre d'inertie G se déplace de la position A d'abscisse $x_A = 0$ à la position B

d'abscisse $x_B = \frac{X_m}{2}$.



EXERCICE 4

2. Étude du mouvement d'un système oscillant {solide (S)- ressort}

On fixe le solide (S) précédent à un ressort horizontal à spires non jointives, de masse négligeable et de constante de raideur K .

À l'équilibre, le centre d'inertie G coïncide avec l'origine du repère $(O, \vec{i})$ lié à la terre considéré comme galiléen (figure 2).

On écarte le solide (S) de sa position d'équilibre et on le libère sans vitesse initiale à l'instant $t_0 = 0$.

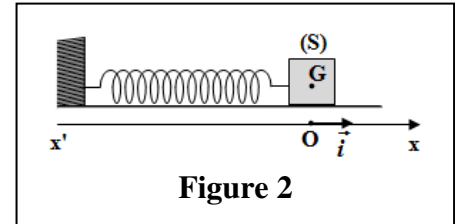


Figure 2

Données:

- Tous les frottements sont négligeables;

- On choisit l'état où le ressort n'est pas déformé comme référence de l'énergie potentielle élastique E_{pe} et le plan horizontal contenant G comme état de référence de l'énergie potentielle de pesanteur E_{pp} .

La courbe de la figure (3) représente les variations de E_{pe} en fonction de x^2 , carré de l'abscisse x du centre d'inertie G dans le repère $(O, \vec{i})$.

2.1. En exploitant la courbe de la figure (3), trouver les valeurs de:

a. la constante de raideur K .

b. l'énergie potentielle élastique maximale $E_{pe,max}$.

c. l'amplitude X_m des oscillations.

2.2. Déduire, en justifiant votre réponse, la valeur de l'énergie mécanique E_m du système oscillant.

2.3. Le centre d'inertie G passe par la position d'équilibre dans le sens positif avec la vitesse $v = 0,25 \text{ m.s}^{-1}$.

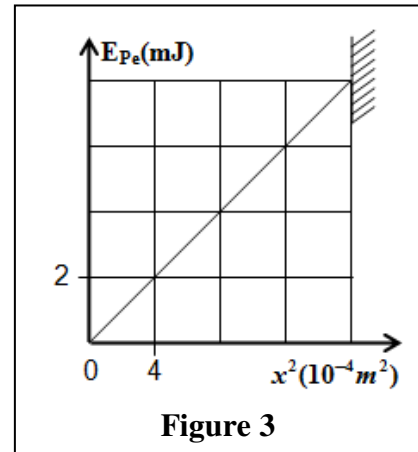


Figure 3

Montrer que l'expression de la période propre des oscillations s'écrit $T_0 = 2\pi \cdot \frac{X_m}{v}$. Calculer T_0 .

EXERCICE 5

Partie II :-Etude du mouvement d'un pendule élastique

Un oscillateur mécanique vertical est constitué d'un corps solide S de masse $m = 200 \text{ g}$ et d'un ressort à spires non jointives de masse négligeable et de raideur K . L'une des extrémités du ressort est fixée à un support fixe et l'autre extrémité est liée au solide S (figure 2).

On se propose d'étudier le mouvement du centre d'inertie G du solide S dans un repère $R(O, \vec{k})$ lié à un référentiel terrestre supposé galiléen.

On repère la position de G à un instant t par la cote z sur l'axe $(O, \vec{k})$. A l'équilibre, G est confondu avec l'origine O du repère $R(O, \vec{k})$. On prendra $\pi^2 = 10$.

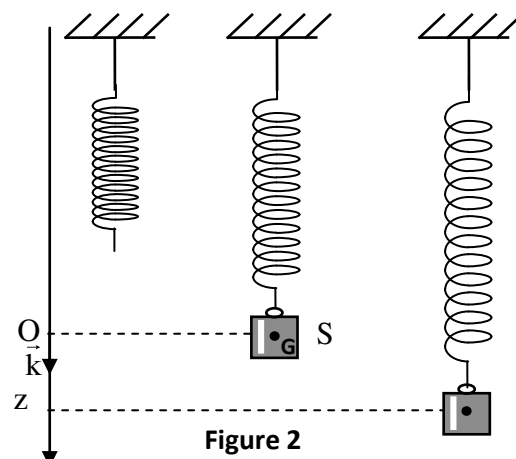


Figure 2

1- Frottements négligeables

On écarte verticalement le solide S de sa position d'équilibre et on l'envoie à l'instant de date $t=0$, avec une vitesse initiale $\vec{V}_0 = V_{0z} \vec{k}$.

La courbe de la figure 3 représente l'évolution de la cote $z(t)$ du centre d'inertie G.

1-1-Déterminer, à l'équilibre,

l'allongement $\Delta \ell_0$ du ressort en fonction de m , K et de l'intensité de la pesanteur g .

1-2- Etablir l'équation différentielle vérifiée par la cote z du centre d'inertie G.

1-3 -La solution de cette équation

différentielle s'écrit $z = z_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$

avec T_0 la période propre de l'oscillateur.

Déterminer la valeur de K et celle de V_{0z} .

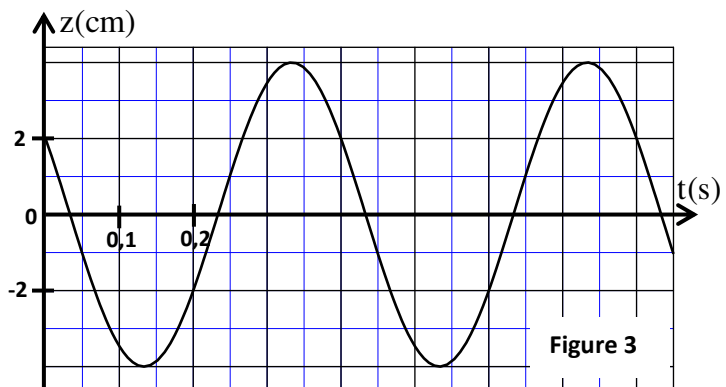


Figure 3

2-Frottements non négligeables

On réalise deux expériences en plongeant l'oscillateur dans deux liquides différents. Dans chaque expérience, on écarte verticalement le solide S de sa position d'équilibre d'une distance z_0 et on l'abandonne sans vitesse initiale à l'instant $t=0$, le solide S oscille alors à l'intérieur du liquide.

Les courbes (1) et (2) de la figure 4 représentent l'évolution de la cote z du centre d'inertie G au cours du temps dans chaque liquide.

2-1- Associer à chaque courbe le régime d'amortissement correspondant.

2-2- On choisit le plan horizontal auquel appartient le point O, origine du repère $R(O, \vec{k})$, comme état de référence de l'énergie potentielle de pesanteur E_{pp} ($E_{pp} = 0$) et l'état où le ressort est non déformé comme état de référence de l'énergie potentielle élastique E_{pe} ($E_{pe} = 0$).

Pour les oscillations correspondant à la courbe (1) :

2-2-1- Trouver, à un instant de date t , l'expression de l'énergie potentielle $E_p = E_{pp} + E_{pe}$ en fonction de K , z et $\Delta \ell'_0$ l'allongement du ressort à l'équilibre dans le liquide.

2-2-2- Calculer la variation de l'énergie mécanique de l'oscillateur entre les instants $t_1=0$ et $t_2=0,4$ s.

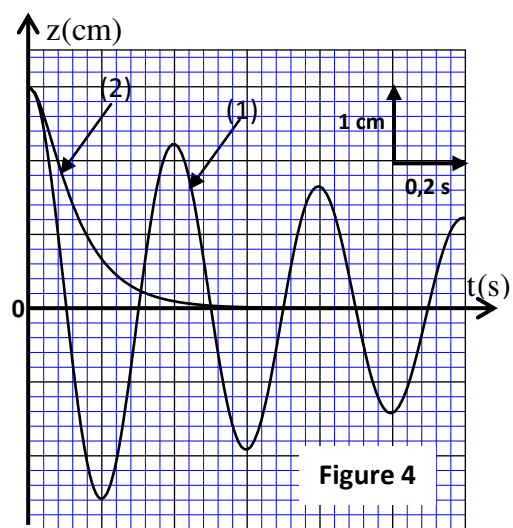


Figure 4

EXERCICE 6

Partie I : Etude énergétique d'un pendule élastique

Le pendule élastique étudié est constitué d'un solide (S), de centre d'inertie G et de masse $m = 100$ g, attaché à l'extrémité d'un ressort à spires non jointives, de masse négligeable et de raideur K . L'autre extrémité du ressort est fixée à un support fixe.

Le solide (S) peut glisser sans frottement sur la ligne de plus grande pente d'un plan incliné d'un angle $\alpha = 30^\circ$ par rapport au plan horizontal (fig.1).

On étudie le mouvement du centre d'inertie G dans le repère orthonormé $R(O, \vec{i}, \vec{j})$ lié au référentiel terrestre considéré comme galiléen. On repère la position de G à un instant t par l'abscisse x sur l'axe $(O, \vec{i})$.

A l'équilibre, G est confondu avec l'origine O du repère (fig.1).

On prendra $\pi^2 = 10$.

1-Déterminer, à l'équilibre, l'expression de l'allongement

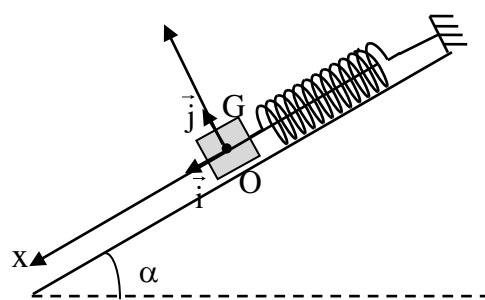


Figure1

$\Delta \ell_0$ du ressort en fonction de K , m , α et de g

l'intensité de la pesanteur.

2-On écarte (S) de sa position d'équilibre d'une distance X_0 dans le sens positif et on l'envoie à l'instant de date $t=0$ avec une vitesse initiale $\vec{V}_0$ telle que $\vec{V}_0 = -V_0 \vec{i}$.

2.1 On choisit comme référence de l'énergie potentielle de pesanteur le plan horizontal auquel appartient G à l'équilibre : ($E_{pp}(O) = 0$) et comme référence de l'énergie potentielle élastique l'état où le ressort est allongé à l'équilibre : ($E_{pe}(O) = 0$). Trouver, à un instant t , l'expression de l'énergie potentielle $E_p = E_{pp} + E_{pe}$ de l'oscillateur en fonction de x et de K .

2.2- A partir de l'étude énergétique, établir l'équation différentielle régie par l'abscisse x .

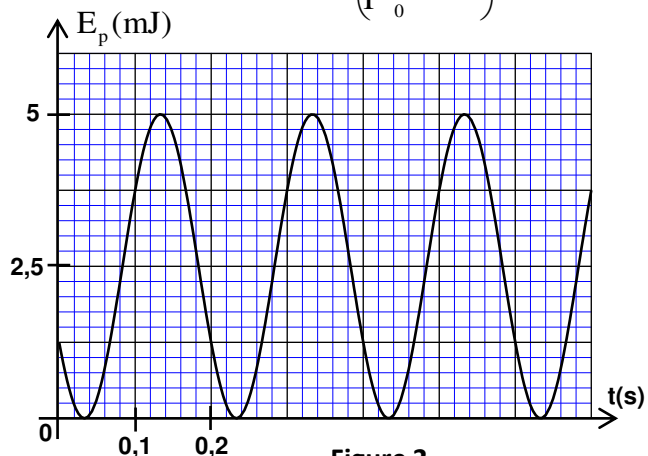
2.3- La solution de l'équation différentielle s'écrit sous la forme : $x(t) = X_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$.

(T_0 étant la période propre de l'oscillateur).

La courbe de la figure 2 représente l'évolution de l'énergie potentielle E_p de l'oscillateur en fonction du temps.

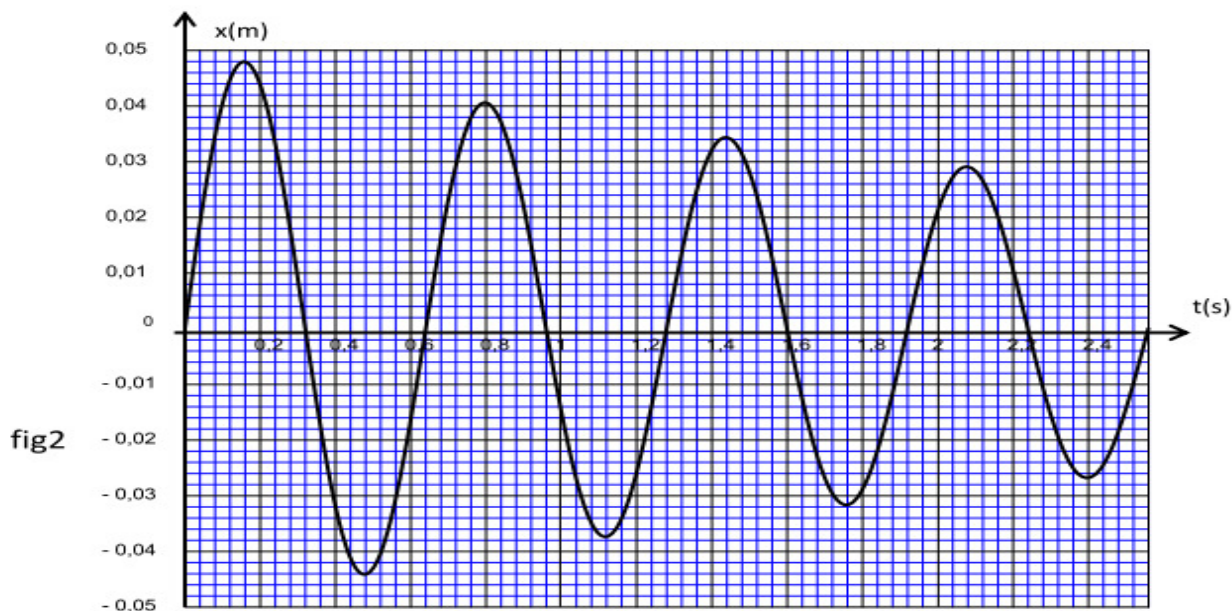
2.3.1-Trouver la valeur de la raideur K , de l'amplitude X_m et de la phase φ .

2.3.2-Par étude énergétique, trouver l'expression de V_0 en fonction de K , m et X_m .



Partie II Oscillations libres amorties

L'enregistrement du mouvement de l'oscillateur (fig2) à l'aide d'un oscillographe montre que l'amplitude des oscillations varie au cours du temps.



3.1- Justifier la diminution de l'amplitude des oscillations.

3.2- La pseudo-période T dans le cas d'amortissement faible s'exprime par la relation

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\mu T_0}{4\pi m}\right)^2}} \quad \text{Déterminer, à l'aide du graphe, le coefficient d'amortissement } \mu.$$