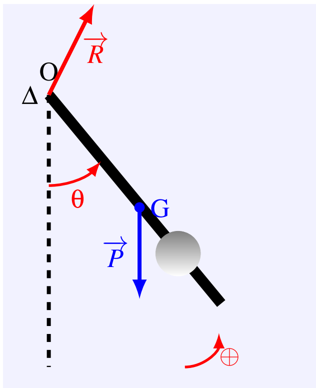
Niveaux: SM PC	Matière: Physique
PROF :Zakaryae Chriki	Résumé N:17
Oscillateurs Mécaniques :Pendule Pesant	

I. Pendule Pesant

On appelle pendule pesant tout solide mobile autour d'un axe (Δ) (en principe horizontal) ne passant pas par son centre de gravité et placé dans un champ de pesanteur

1. Equation différentielle :



Position d'équilibre

Système étudié : (S)
Bilan des forces extérieur exercées sur (S) :
* $\vec{P}$ le poids du système (S)
* $\vec{R}$ force exercée par l'axe (Δ) sur (S) ;

Application de la relation fondamentale de la dynamique : $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) = J_\Delta.\ddot{\theta}$

$\mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) = 0$ car la droite d'action de $\vec{R}$ coupe l'axe (Δ)
On pose $d = 0G$, où G est le centre d'inertie du système (S) . Dans ce cas nous avons :

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = -mgdsin\theta$$

$$-mgdsin\theta = J_\Delta.\ddot{\theta}$$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{mgd}{J_\Delta} sin\theta = 0}$$

C'est l'équation différentielle du mouvement du pendule pesant , elle est non linéaire .

Conclusion :
Le mouvement du pendule pesant est un mouvement de rotation oscillatoire, periodique mais non sinusoïdale

2. cas des petites oscillations :

Pour des faibles oscillations ($\theta \leqslant 0,26 rad$) on peut écrire avec une bonne approximation $sin\theta \simeq \theta$

, d'où l'équation différentielle dans ce cas est : $\boxed{\ddot{\theta} + \frac{mgd}{J_\Delta}\theta = 0}$

C'est une équation différentielle du mouvement du pendule pesant pour des faibles oscillations .

La solution de cette équation différentielle est de la forme : $\boxed{\theta(t) = \theta_m cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi_0\right)}$

θ_m est l'amplitude des oscillations (rad) , φ_0 est la phase à l'origine des dates (rad) et T_0 la période propre du pendule de pesant .

3. Expression de la période propre T_0 :

La période propre d'un pendule pesant libre et non amorti qui effectue des oscillations de faible amplitude, a pour expression :

$$\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{mgd}}}$$

T_0 la période propre du pendule (s)
J_Δ Moment d'inertie du système par rapport à l'axe (Δ) en $(kg.m^2)$
d distance séparant le centre d'inertie G du pendule à l'axe Δ en (m).
g intensité de pesanteur en (m/s^2) La fréquence propre du pendule pesant : $f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mgd}{J_\Delta}}$ f_0 en Hz

II. Etude Energitique

1. Energie cinétique :

L'énergie cinétique d'un pendule pesant effectuant un mouvement oscillatoire est définie par la relation :

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2}$$

Avec J_Δ est le moment d'inertie du pendule par rapport à l'axe Δ exprimé en $kg.m^2$; $\dot{\theta}$ est la vitesse angulaire du pendule en rad/s et E_c est l'énergie cinétique en joule (J) .

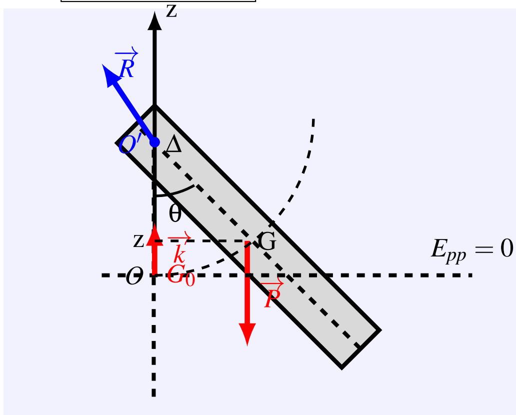
$$\theta = \theta m.\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t + \varphi\right) \quad \text{et} \quad \dot{\theta} = -\theta m.\frac{2\pi}{T_0}.\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}.t + \varphi\right) \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{C}{J_\Delta}}$$

$$Ec = \frac{1}{2}.J_\Delta\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}.J_\Delta\left(-\theta m.\frac{2\pi}{T_0}.\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}.t + \varphi\right)\right)^2 = \frac{1}{2}.C(\theta_m^2 - \theta^2)$$

- Si θ = θm ou θ =- θm alors l'énergie cinétique est nulle donc la vitesse est nulle et l'oscillateur s'arrête et change le sens de son mouvement
- Si θ = 0 alors l'oscillateur passe par sa position d'équilibre et son énergie cinétique est maximale et sa vitesse l'est aussi

2. Energie potentielle de pesanteur:

L'énergie potentielle de pesanteur d'un pendule pesant est donnée par la relation suivante : $\boxed{E_{pp} = mgz + Cte}$



Avec m la masse du système en (kg), g intensité de pesanteur en (m/s^2), z la côte du centre d'inertie G du système sur l'axe $O, \vec{k}$ d'un repère orthonormé $\mathscr{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orienté vers le haut .
Cte une constante qui dépend de l'état de référence choisi où l'énergie potentielle est nulle ($E_{pp} = 0$ et $z = z_{ref}$

L'énergie potentielle de pesanteur en fonction de θ est :
$E_{pp} = mgd(1 - cos\theta)$ avec $d = OG$.

$$\boxed{E_{pp} = mgd(1 - cos\theta)}$$

3. Expresion de la variation de l'énergie potentielle de pesanteur:

ΔEp_p : Variation de l'Energie potentielle de pesanteur
$\mathbf{\Delta Ep_p = m.g.(Z_2 - Z_1) = -W_{1\to 2}(\vec{P})}$

4. Energie mécanique :

L'expression de l'énergie mécanique d'un pendule pesant dans un référentielle terrestre est : $\boxed{E_m = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2 + mgz + Cte}$

5. Diagramms d'énergie d'un penddule pesant :

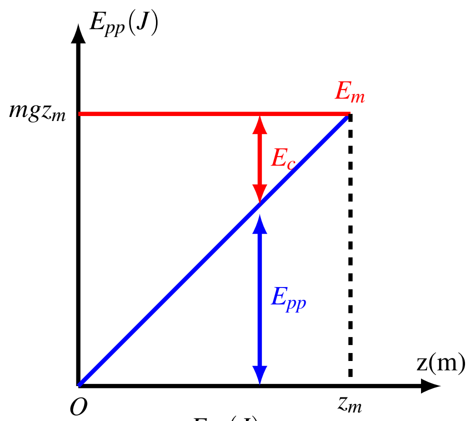
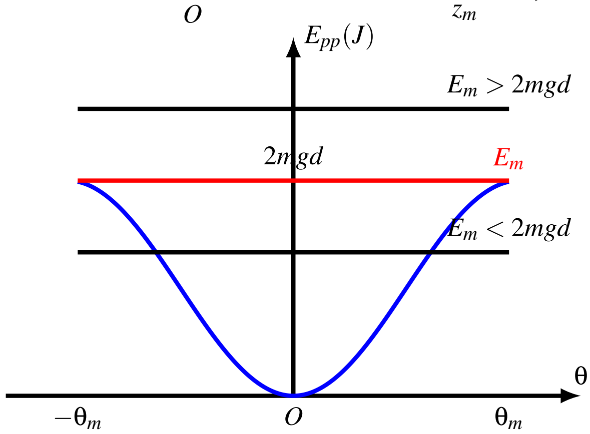


Diagramme des énergies en fonction de z : (en absence de frottement)
* $E_{pp} = mgz$ avec $0 \leqslant z \leqslant +z_m$
* l'énergie mécanique : pour $0 \leqslant z \leqslant z_m$ on a $E_m = E_c + mgz$ lorsque $z = z_m$ on a $E_m = mgz_m$
lorsqu'il passe par la position d'équilibre on a $z = 0$ et $E_m = E_c = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}_m^2$
* $E_c = E_m - E_{pp}$
E_m est constante et il y a une échange d'énergie au cours des oscillations , soit $\Delta E_c = -\Delta E_{pp}$

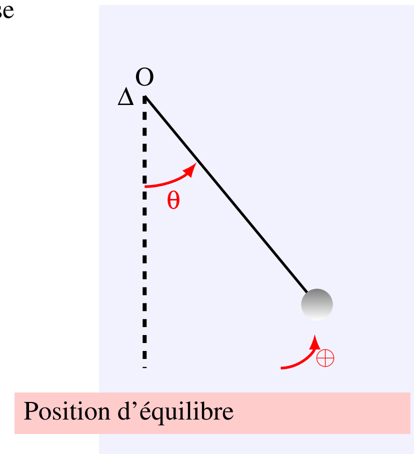
Diagramme des énergies en fonction de θ



* L'expression de l'énergie potentielle en fonction de θ est :
$E_{pp} = mgd(1 - cos\theta)$ avec $-\theta_m \leqslant \theta \leqslant \theta_m$.
Cas 1 : $E_m > 2mgd \Longrightarrow E_c = E_m - E_{pp} > 0$ le pendule ne s'arrête pas et il tourne autour de l'axe (Δ) .
Cas 2 : $E_m < 2mgd \Longrightarrow E_c = E_m - E_{pp} < 0$ et puisque E_c ne peut pas être négative alors dans ce cas $E_c \geqslant 0$ alors pour $E_c = 0$ l'élongation $\theta = \theta_m$ ou $\theta = -\theta_m$ et le pendule pesant a un mouvement oscillatoire libre et amorti

III.Pendule simple

Le **pendule simple** est une masse ponctuelle fixée à l'extrémité d'un fil inextensible de masse négligeable, et oscillant sous l'effet de la pesanteur.



$d = \ell$ et $J_\Delta = m.\ell^2$

- Expression de la période T_0

$$T_0 = 2\pi.\sqrt{\frac{J_\Delta}{m.g.d}} = 2\pi.\sqrt{\frac{m.\ell^2}{m.g.\ell}} = 2\pi.\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

- La longueur du pendule simple synchrone avec le pendule pesant (ont même période propre T_0)

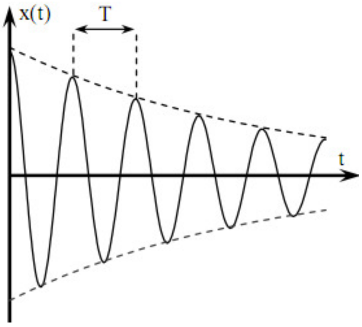
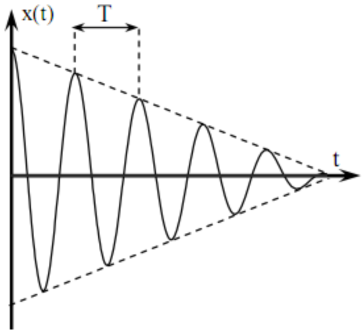
$$T_0 = 2\pi.\sqrt{\frac{J_\Delta}{m.g.d}} = 2\pi.\sqrt{\frac{\ell}{g}} \text{ donc } \frac{J_\Delta}{m.g.d} = \frac{\ell}{g} \text{ d'où } \ell = \frac{J_\Delta}{m.d}$$

❖ Amortissement des oscillations mecaniques

L'amortissement d'un système est une atténuation de l'amplitude de son mouvement par dissipation (perte) de l'énergie mécanique

$$\Delta E_m = W_{A\to B}(\vec{R}) < 0$$

On en distingue deux types d'amortissement

Amortissement fluide	**Amortissement solide**
Un solide qui oscille dans un fluide (liquide ou gaz) est soumis à un amortissement 	Le frottement entre deux solides correspond à une dissipation sous la forme de chaleur. 

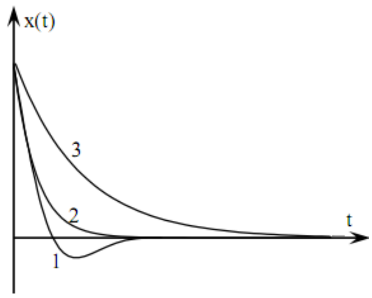
- Cas de faible amortissement
  - L'amplitude diminue jusqu'as arrêt du mobile
  - Mouvement de l'oscillateur est pseudo periodique

T : pseudo période

$T=T_0$: la pseudo période et la période propre sont égales (pour les fortement solide)

Différents régimes de retour à l'équilibre d'un système en fonction du frottement
On observe les régimes :

- Pseudopériodique (1)
- Critique (2)
- Apériodique (3)



❖ Oscillations forcées et résonance

Le phénomène de résonance mécanique se produit lorsque la période T_e des oscillations forcées est voisine de la période propre T_e du résonateur

Influence de l'amortissement sue la résonance :
Dans le cas d'un amortissement faible du résonateur , l'amplitude des oscillations forcées à la résonance prend une valeur grande ; on dit que la résonance est aigue .Dans le cas d'un amortissement du résonateur fort , l'amplitude des oscillations prend une valeur faible , on dit que la résonance est floue ou obtûe .

EXERCICE 1

Les oscillateurs mécaniques sont employés dans différents secteurs industriels et quelques appareils de sports et les jeux et autres . Parmi ces oscillateurs n la balançoire qu'on considère comme pendule .
Un enfant se balance à l'aide d'une balançoire constituée d'une barre qu'il utilise comme siège , suspendue par deux cordes fixées à un support fixe .
On modélise le système { enfant + balançoire } par un pendule simple composé d'un fil , inextensible de masse négligeable et de longueur L , et un corps (S) de masse m .
Le peut tourner autours d'un axe fixe horizontal (Δ) perpendiculaire au plan vertical . Le moment d'inertie du pendule par rapport à l'axe (Δ) est $J_\Delta = m.L^2$.

Données :
- Intensité de la pesanteur : $g = 9,8\ m.s^{-2}$; longueur du fil : L = 3 m ; masse du corps (S) : m = 18 kg .
O prend dans le cas de petites oscillations : $\sin\theta \approx \theta$ et $\cos\theta \approx 1 - \theta^2/2$ (rad) .
On néglige les dimensions du corps (S) par rapport à la longueur du fil et tous les frottements .

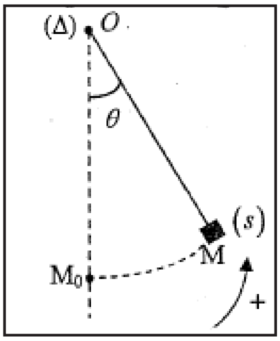
1- Étude dynamique du pendule :

On écarte le pendule de sa position d'équilibre stable d'un angle $\theta_m = \frac{\pi}{20}$ dans le sens positif et le libère sans vitesse initiale à l'instant t = 0 .
On repère la position du pendule à un instant t par l'abscisse angulaire θ défini entre le pendule et la verticale passant par le point O tel que $\theta = (\overrightarrow{OM_o}, \overrightarrow{OM})$ (voire figure)

1-1- Montrer en utilisant la relation fondamentale de la dynamique de rotation autour d'un axe fixe , que l'équation différentielle du mouvement du pendule dans un référentiel galiléen lié à la Terre s'écrit :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0$$

1-2- Calculer la période propre T_o du pendule .
1-3- Écrire l'équation horaire du mouvement du pendule .
1-4- En appliquant la deuxième loi de Newton dans la base de Frenet , trouver l'expression de la tension du fil T à un instant t en fonction de m , g , θ , L et v la vitesse linéaire du pendule simple . Calculer la valeur de T à l'instant $t = \frac{T_o}{4}$.



2- Étude énergétique:
On fournie au pendule qui est immobile dans sa position d'équilibre stable une énergie cinétique de valeur $E_C = 264{,}6$ J , et il tourne dans le sens positif .
2-1- On choisi le plan horizontal passant par le point M_o comme référence de l'énergie potentielle de pesanteur (voire figure) .
Écrire l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur E_P du pendule à l'instant t en fonction de θ , m , L et g .
2-2- En se basant sur l'étude énergétique , déterminer la valeur maximale θ_{max} de l'abscisse angulaire .

EXERCICE 2

L'homme a utilisé la montre pour mesurer le temps depuis longtemps , et a inventé différents types de montres , comme la montre solaire , la montre à eau et le sablier ... jusqu'à ce Huygens fabriqua la première montre murale en 1657 .
Ce type de montres est basé sur une balançoire qu'on modélise dans cette étude par un pendule pesant effectuant des petites oscillations libres sans frottements .
Le pendule étudié est composé d'une barre homogène AB , sa masse m = 0,203 kg , sa longueur AB = L= 1,5 m , mobile dans un plan plan vertical autours d'un axe horizontal (Δ) fixe passant son extrémité A (figure 1).
On étudie dans un repère lié à un référentiel terrestre supposé galiléen .
On repère , à chaque instant t , la position du pendule par son abscisse angulaire θ .
On donne le moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation (Δ) : $\frac{1}{3}.m.L^2$.
On admet dans le cas des petites oscillations que : $\sin\theta \approx \theta$ avec θ en radian .
On note g l'intensité de la pesanteur .
On écarte le pendule pesant de sa position d'équilibre stable d'un petit angle θ_m dans le sens positif et on le lâche sans vitesse initiale à instant pris comme origine des dates .

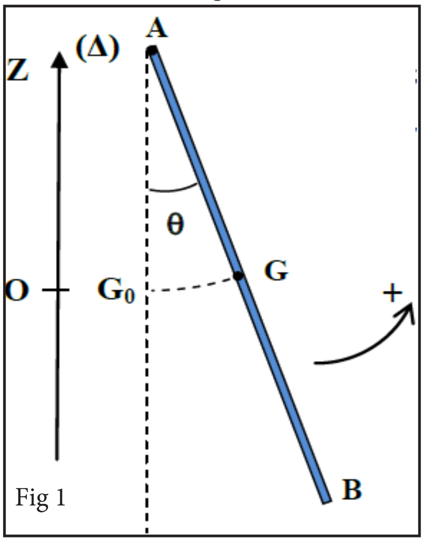
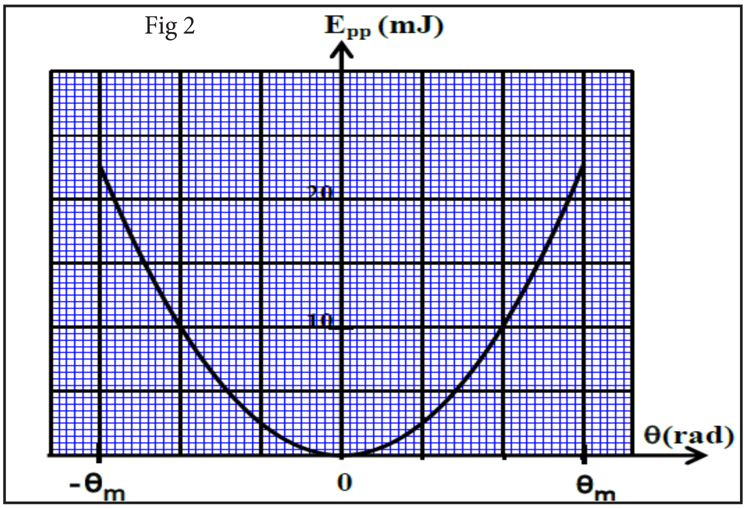


Fig 1

1- Étude dynamique du pendule pesant
1-1- En appliquant la relation fondamentale de la dynamique de rotation , établir l'équation différentielle du mouvement du pendule .
1-2- Déterminer la nature du mouvement du pendule pesant et écrire l'équation horaire θ(t) en fonction de t , θ_m et la période propre T_o .
1-3- Montrer que l'expression de la période propre de ce pendule est : $T_o = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$
1-4- Calculer la longueur ℓ du pendule simple synchrone avec le pendule pesant étudié .
2- Étude énergétique du pendule pesant
On choisie le plan horizontal passant par G_o , la position du centre d'inertie G de la barre AB à l'équilibre stable , comme référence de l'énergie potentielle de pesanteur ($E_{PP}(0) = 0$) .
La figure 2 représente les variations de l'énergie potentielle de pesanteur $E_{PP}(\theta)$ du pendule étudié en fonction du temps dans l'intervalle$[-\theta_m , \theta_m]$.

Fig 2


En exploitant le diagramme d'énergie :
2-1- Déterminer la valeur de l'énergie mécanique E_m du pendule .
2-2- Trouver la valeur absolue de la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ du pendule au passage par la position d'abscisse angulaire $\theta = \frac{2}{3}.\theta_m$.

EXERCICE 3

Première partie : étude énergétique du mouvement d'un pendule simple
Pour étudier quelques lois physiques régissant le mouvement d'un pendule simple , qui est considéré comme un cas particulier du pendule pesant , une professeur et ses élèves ont utilisé un pendule simple constitué de :
-Fil inextensible de longueur L et de masse négligeable .
- Une bille de dimensions négligeables et de masse m = 0,1 kg .
- Caméra numérique et un dispositif informatique adéquat .
A l'instant t = 0 , un des élève a écarté la bille de sa position d'équilibre stable d'un angle petit θ_m et l'a libéré sans vitesse initiale . Une

élève a filmé la bille pendant son mouvement à l'aide de la caméra .
Le mouvement du pendule a lieu dans un plan vertical autour d'un axe horizontal (Δ) passant par l'extrémité O du fil .
θ représente l'abscisse angulaire du pendule à l'instant t .(Figure 2)

Données :
- Tous les frottements sont négligeables .
- L'intensité de la pesanteur : $g = 10\ m.s^{-2}$.
- On choisi le plan horizontal passant par la position de la bille à l'équilibre stable du pendule comme origine de l'énergie potentielle de pesanteur E_{PP} .

L'étude est faite dans un référentielle terrestre supposé galiléen .
La professeur a traité les données du film enregistré à l'aide du dispositif informatique , et a obtenu les deux courbes représentées sur la figure 3 représentant les variations de l'abscisse angulaire θ et de l'énergie potentielle de pesanteur E_{PP} en fonction du temps .

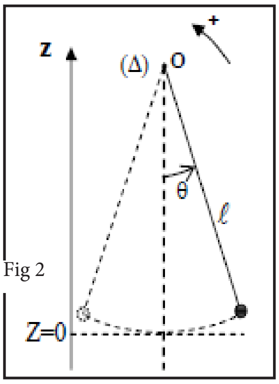
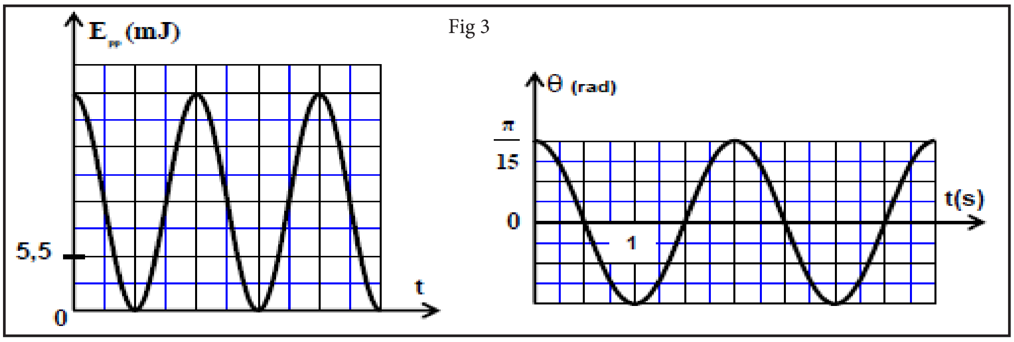


Fig 2

Fig 3


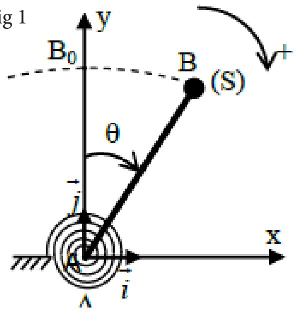
1- Déterminer graphiquement l'angle maximal θ_m et la période propre T_o .
2- Parmi les deux expressions suivantes : $T_o = 2\pi\sqrt{\frac{g}{L}}$ et $T_o = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$, choisir l'expression juste de la période propre en se basant sur l'équation au dimensions .
3- Calculer la longueur L du pendule étudié .
4- En exploitant le diagramme d'énergie , déterminer :
4-1- L'énergie mécanique E_m du pendule simple .
4-2- La valeur absolue de la vitesse linéaire de la bille au moment de son passage par la position d'équilibre stable .

EXERCICE 4

Le gravimètre est un appareil qui permet de déterminer, avec une grande précision, la valeur deg ; valeur d'intensité du champ de pesanteur en un lieu donné.
Les domaines d'utilisation des gravimètres sont nombreux : la géologie, l'océanographie, la sismologie, l'étude spatiale, la prospection minière….etc.

On modélise un type de gravimètres par un système mécanique oscillant constitué de :
- une tige AB, de masse négligeable et de longueur L, pouvant tourner dans un plan vertical autour d'un axe fixe (Δ) horizontal passant par l'extrémité A ;
- un corps solide (S), de masse m et de dimensions négligeables, fixé à l'extrémité B de la tige ;
- un ressort spiral, de constante de torsion C, qui exerce sur la tige AB un couple de rappel de moment $M_C = -C.\theta$; où θ désigne l'angle que fait AB avec la verticale ascendante Ay. (figure1)

On étudie le mouvement de ce système mécanique dans un repère orthonormé $(A , \vec{i} , \vec{j})$ lié à un référentiel terrestre considéré comme galiléen.

Fig 1


Données :
- masse du solide (S) : $m=5.10^{-2}$ kg ;
- longueur de la tige : $L=7.10^{-1}$ m ;
- constante de torsion du ressort spiral : $C=1{,}31 N.m.rad^{-1}$;
- expression du moment d'inertie du système par rapport à l'axe (Δ) : $J_\Delta = m.L^2$;
- pour les angles faibles : $\sin\theta \approx \theta$ et $\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$ avec θ en radian .

On écarte le système mécanique de sa position d'équilibre vertical d'un angle petit max θ dans le sens positif puis on le lâche sans vitesse initiale à un instant t=0.
Le système est repéré, à chaque instant t, par son abscisse angulaire θ .
On néglige tous les frottements.

1- Étude dynamique

1-1- En appliquant la relation fondamentale de la dynamique dans le cas de la rotation autour d'un axe fixe, montrer que l'équation différentielle du mouvement du système étudié s'écrit, pour les faibles oscillations, sous la forme : $\ddot{\theta} + (\frac{C}{m.L^2} - \frac{g}{L}).\theta = 0$

1-2- En utilisant les équations aux dimensions, déterminer la dimension de l'expression $(\frac{C}{m.L^2} - \frac{g}{L})$.

1-3- Pour que la solution de l'équation différentielle précédente soit sous la forme : $\theta(t)= \theta_{max} .\cos(\frac{2\pi}{T}t +\varphi)$, il faut que la constante de torsion C soit supérieure à une valeur minimale C_{min} . Trouver l'expression de C_{min} en fonction de L , m et g .

1-4- La courbe de la figure 2 représente l'évolution de l'abscisse angulaire θ(t) dans le cas où $C > C_{min}$.

1-4-1- Déterminer la période T , l'amplitude θ_{max} et la phase à l'origine φ .
1-4-2- Trouver l'expression de l'intensité de pesanteur g en fonction de L , m, C et T . Calculer sa valeur . (on prend π=3,14).

2- Étude énergétique

Un système d'acquisition informatisé a permis de tracer la courbe de la figure 3, qui représente les variations de l'énergie cinétique C E du système étudié en fonction de l'abscisse angulaire θ dans le cas de faibles amplitudes.

On choisit le niveau horizontal passant par B_o comme état de référence pour l'énergie potentielle de pesanteur ($E_{pp} = 0$), et on choisit l'énergie potentielle de torsion nulle ($E_{pt} = 0$) pour $\theta = 0$.
En exploitant la courbe de la figure 3, déterminer :
2-1- la valeur de l'énergie mécanique E_m du système étudié.
2-2- la valeur de l'énergie potentielle E_p du système à la position $\theta_1 = 0{,}10$ rad .
2-3- la valeur absolue de la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ du système à l'instant de son passage par la position $\theta = 0$.

Fig 2

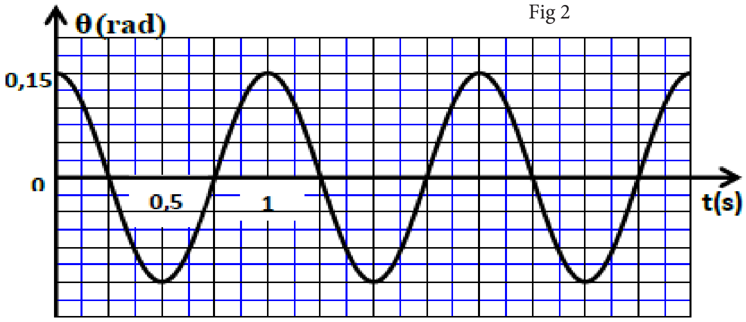
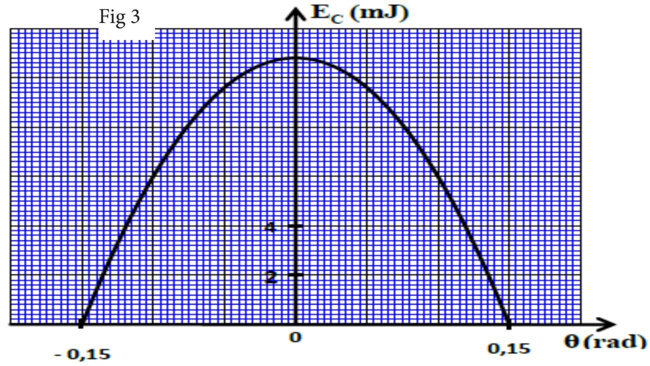


Fig 3



EXERCICE 5

Cette partie vise la détermination de l'intensité de la pesanteur , en un lieu donné, ainsi que quelques grandeurs qui sont liées au mouvement d'un pendule pesant.

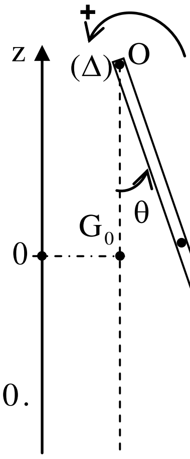


Figure 1

Un pendule pesant est constitué d'une tige homogène OA de masse m, de centre d'inertie G et de longueur L pouvant effectuer un mouvement de rotation dans un plan vertical autour d'un axe horizontal (Δ) passant par son extrémité O (figure 1). Soit J_Δ le moment d'inertie du pendule par rapport à l'axe (Δ) .
On étudie le mouvement du pendule dans un repère lié à un référentiel terrestre supposé galiléen.
On écarte la tige OA de sa position d'équilibre stable d'un petit angle θ_0 , dans le sens positif, puis on la lance avec une vitesse angulaire initiale à l'instant de date $t=0$.
On repère la position du pendule à un instant de date t par l'abscisse angulaire θ .Le centre G est confondu avec G_0 quand le pendule passe par sa position d'équilibre stable (figure 1).
On néglige tous les frottements et on choisit le plan horizontal passant par G_0 comme état de référence de l'énergie potentielle de pesanteur $(E_{pp}=0)$.

Données : - La masse de la tige : $m=100\,g$; - La longueur de la tige : $L=0{,}53\,m$;
- L'expression du moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe (Δ) : $J_\Delta = \frac{1}{3} m.L^2$;
- Pour les petits angles : $\cos\theta \approx 1-\frac{\theta^2}{2}$ où θ est exprimé en radian ; - On prendra : $\pi^2 = 10$.

1-Trouver l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur du pendule pesant à un instant t, dans le cas des oscillations de faible amplitude, en fonction de θ , L , m et g intensité de la pesanteur.
2- Par une étude énergétique, montrer que l'équation différentielle du mouvement s'écrit : $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{3g}{2L}\theta = 0$.
3- La solution de l'équation différentielle s'écrit sous la forme : $\theta(t) = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$ où T_0 est la période propre du pendule.
La courbe de la figure 2 représente l'évolution de l'énergie cinétique du pendule étudié au cours du temps.
3-1-Déterminer la valeur de l'intensité de pesanteur g .
3-2-Trouver la valeur de l'amplitude θ_m du mouvement.
3-3-Déterminer la valeur de φ .

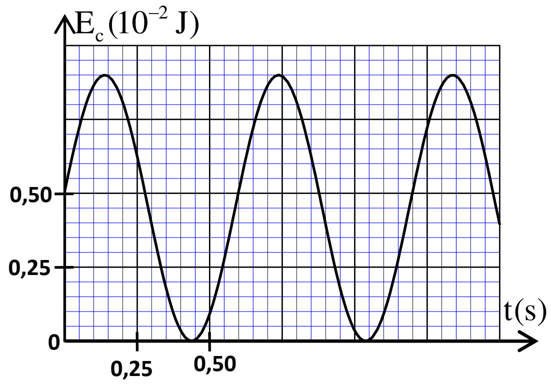


Figure 2

EXERCICE 6

L'objectif de cette partie est la détermination de la position du centre d'inertie G d'un système oscillant et son moment d'inertie J_Δ à l'aide d'une étude énergétique et dynamique .

Un pendule pesant de centre d'inertie G, est constitué d'une barre AB de masse $m_1 = 100g$ et d'un corps (C) de masse $m_2 = 300g$ fixé a l'extrémité B de la barre.

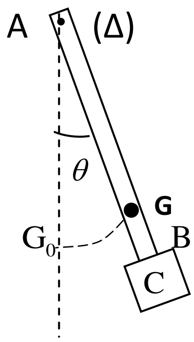


Fig2

Le pendule pesant peut tourner autour d'un axe fixe horizontal (Δ) passant par l'extrémité A (fig2).Le moment d'inertie du pendule par rapport à l'axe (Δ) est J_Δ.
AG = d est la distance entre le centre d'inertie et l'axe de rotation.
On écarte le pendule de sa position d'équilibre stable d'un angle θ_m petit et on le libère sans vitesse initiale à un instant considéré comme origine des temps $(t = 0s)$, le pendule effectue alors un mouvement oscillatoire autour de sa position d'équilibre.
On considère que tous les frottements sont négligeables et on choisit le plan Horizontal passant par le point G_0, position de G à l'équilibre stable, comme état de référence de l'énergie potentielle de pesanteur $(E_{pp} = 0)$. On repère à chaque instant la position du pendule pesant par son abscisse angulaire θ formé par la barre et la ligne verticale passant par le point A , on note $\frac{d\theta}{dt}$ la vitesse angulaire du pendule pesant à un instant t.
La figure 3 représente la courbe de l'évolution de l'énergie cinétique E_c du pendule pesant en fonction du carré de l'abscisse angulaire θ^2.
on prend $\cos(\theta) = 1 - \frac{\theta^2}{2}$ et $\sin(\theta) \approx \theta$ avec θ en radian. L'intensité de la pesanteur est $g = 9{,}8 m.s^{-2}$.

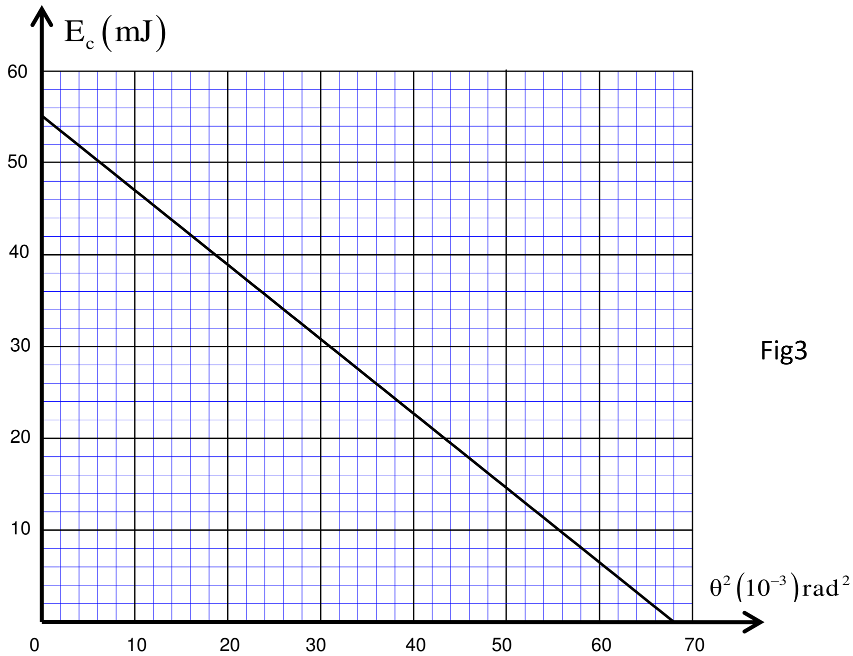


Fig3

1. Détermination de la position du centre d'inertie G du système

1-1 Soit E_m l'énergie mécanique du pendule pesant dans le cas de petites oscillations ;

Montrer que $\frac{E_m}{\theta_m^2} = \frac{(m_1 + m_2).g.d}{2}$.

1-2 A l'aide du graphe de la figure 3, déduire la valeur de d .

2. Détermination du moment d'inertie J_Δ

2-1 Trouver en appliquant la relation fondamentale de la dynamique, l'équation différentielle du mouvement du pendule pesant.

2-2 Trouver l'expression de la fréquence propre N_0 de ce pendule en fonction de J_Δ, m_1, g , m_2 et d pour que la solution de l'équation différentielle s'écrit sous la forme $\theta(t) = \theta_m \cos(2\pi N_0 t + \varphi)$.

2-3 Sachant que la valeur de la fréquence propre est $N_0 = 1Hz$. Calculer J_Δ.

EXERCICE 7

Le pendule pesant est un système mécanique qui peut effectuer un mouvement de rotation oscillatoire autour d'un axe fixe horizontal ne passant pas par son centre d'inertie; sa période propre dépend de l'accélération de la pesanteur .

L'objectif de cette partie est l'étude de l'effet de l'accélération de la pesanteur sur la période propre d'un pendule pesant dans le cas de faibles oscillations .

Le pendule pesant représenté sur la figure 1 est constitué d'un disque de masse m_1 , fixé à l'extrémité inferieur A d'une tige OA de masse m_2 avec $m_1 + m_2 = 200g$.

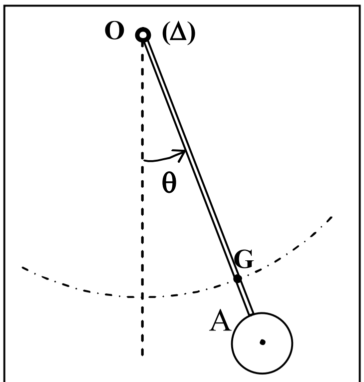


Figure 1

Le pendule pesant peut effectuer un mouvement de rotation oscillatoire autour d'un axe fixe (Δ) horizontal passant par l'extremité O de la tige. Le centre d'inertie G du pendule pesant est situé sur la tige à une distance OG=d=50 cm de O.

Le moment d'inertie du pendule pesant par rapport à l'axe (Δ) est $J_\Delta = 9,8.10^{-2}$ kg.m². On néglige tous les frottements .

On prend pour les petits angles : $\cos\theta \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2}$ et $\sin\theta \approx \theta$ avec θ en radian . Et on prend $\pi^2 = 10$

1- Au niveau de la mer où l'accélération de la pesanteur est $g_0 = 9,8\ m.s^{-2}$, on écarte le pendule pesant de sa position d'équilibre stable d'un angle $\theta_0 = \frac{\pi}{18}$ rad et on le libère sans vitesse initiale à l'instant t=0. On repère à chaque instant la position du pendule pesant par l'abscisse angulaire θ mesurée à partir de sa position d'équilibre stable (figure 1).

1.1- En appliquant la relation fondamentale de la dynamique relative à la rotation du pendule pesant , déterminer l'équation différentielle que vérifie l'angle θ dans le cas de faibles oscillations .

1.2- Trouver, en fonction de J_Δ, d, m_1, m_2 et g_0 l'expression de la période propre T_0 du pendule pour que la solution de l'équation différentielle soit $\theta = \theta_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$. Calculer T_0.

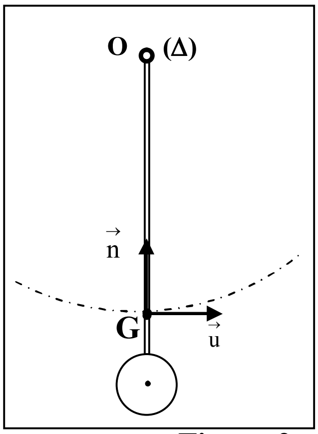


Figure 2

1.3- En appliquant la deuxième loi de Newton et en utilisant la base de Freinet $(G, \vec{u}, \vec{n})$ (figure 2) , trouver l'expression de l'intensité R de la force exercée par l'axe (Δ) sur le pendule pesant au moment de passage du pendule par sa position d'équilibre stable en fonction de m_1,m_2, d , g_0 , θ_0, et T_0. Calculer R.

2- Dans une région montagneuse où l'accélération de la pesanteur est $g = 9,78\ m.s^{-2}$, la période propre du pendule pesant augmente de ΔT.

Pour corriger le décalage temporel Δt , on utilise un ressort spiral équivalent à un fil de torsion dont la constante de torsion est C .

On relie l'une des extrémités du ressort spiral à l'extrémité O de la tige et on fixe l'autre extrémité du ressort à un support fixe de telle façon que le ressort spiral soit non déformé lorsque le pendule pesant est dans sa position d'équilibre stable (figure3).

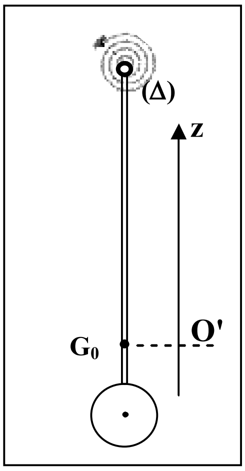


Figure 3

On choisit le niveau horizontal passant par G_0 centre d'inertie du pendule pesant dans sa position d'équilibre stable , comme référence de l'énergie potentielle de pesanteur et la position dans laquelle le ressort spiral est non déformé , comme référence de l'énergie potentielle de torsion . le point G_0 correspond à l'origine du repère O'z orienté vers le haut (figure 3).

2.1- Montrer dans le cas de petites oscillations et à une date t , que l'énergie mécanique de l'oscillateur ainsi constitué s'écrit sous la forme : $E_m = a.\dot{\theta}^2 + b.\theta^2$ en précisant les expressions de a et de b en fonction des données utiles de l'exercice .

2.2- En déduire l'équation différentielle du mouvement que vérifie l'angle θ en fonction de a et b .

2.3- Trouver l'expression de la constante de torsion C qui convient à la correction du décalage temporel ΔT en fonction de m_1, m_2, d, g, et g_0 . Calculer C .