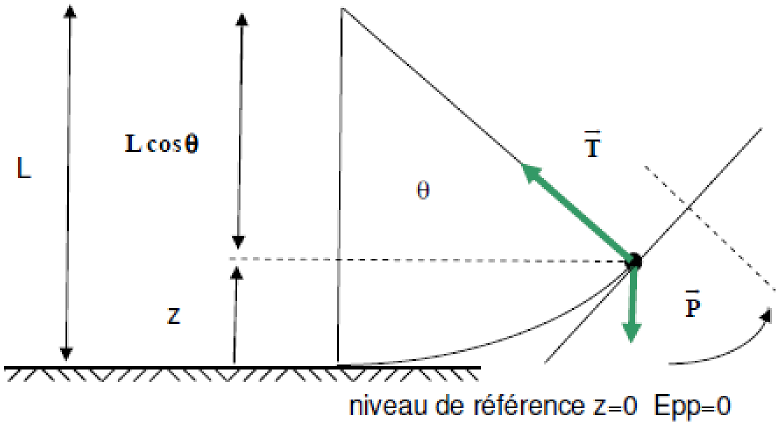
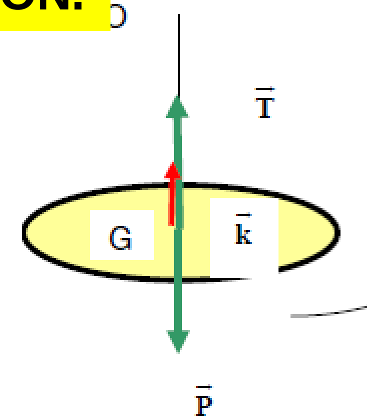
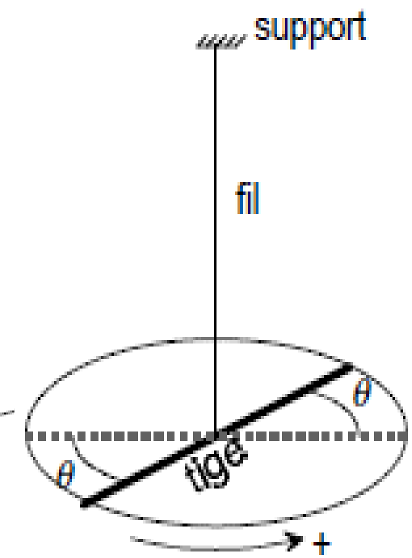


PENDULE SIMPLE

PENDULE DE TORSION.

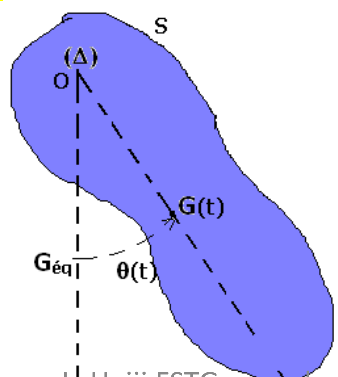
Il est constitué d’un disque de masse m et de rayon R suspendu en son centre par un fil de torsion de masse négligeable. L’autre extrémité du fil est fixe.

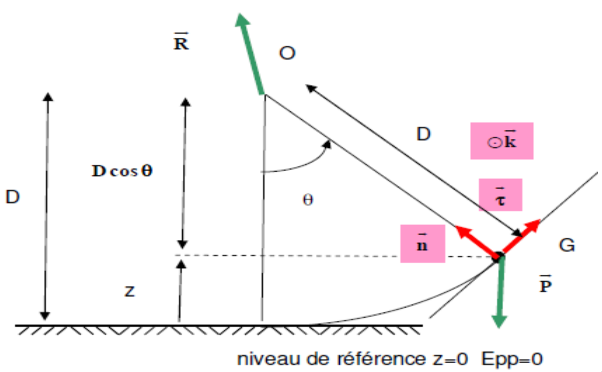




PENDULE PESANT.

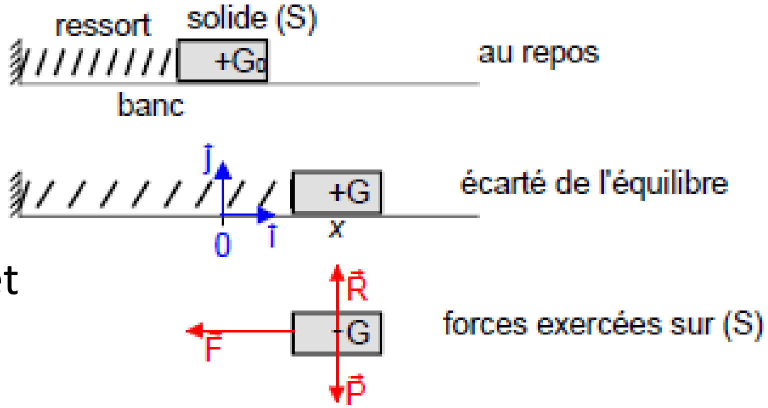
Un pendule pesant est un solide mobile autour d’un axe D ne passant pas par son centre d’inertie





Oscillateurs mécaniques

❖ Pendule élastique horizontal



Étude dynamique

Au repos (le ressort ayant sa longueur naturelle), le solide (S) est en équilibre sous l'action de son poids et de la réaction du banc : $\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$

Si l'on écarte le centre d'inertie G du solide , il se met à osciller autour de G0

Le solide (S) est soumis à trois forces :

- son poids $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$
- la réaction du banc $\vec{R}$
- l'action du ressort $\vec{F} = -k \cdot x \cdot \vec{i}$

P.E.D $m \cdot \vec{a}_G = \vec{F} + \vec{R} + \vec{P}$

Par projection dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$:

- sur $\vec{j}$: $R - P = 0$
- sur $\vec{i}$: $m \cdot a_G = -k \cdot x$ ou $m \cdot \ddot{x} = -k \cdot x$ avec $\ddot{x} = \dfrac{d^2x}{dt^2}$

Par projection dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$:

- sur $\vec{j}$: $R - P = 0$
- sur $\vec{i}$: $m \cdot a_G = -k \cdot x$ ou $m \cdot \ddot{x} = -k \cdot x$ avec $\ddot{x} = \dfrac{d^2x}{dt^2}$

L'équation du mouvement de G est donc une équation différentielle du second ordre :

$$\boxed{m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + k \cdot x = 0} \text{ ou } \boxed{m \cdot \ddot{x} + k \cdot x = 0} \text{ ou } \boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m} \cdot x = 0} \qquad \boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

$$\boxed{x = x_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)}.$$

Conservation de l'énergie mécanique d'un oscillateur

L'énergie cinétique du système est $E_c = \dfrac{1}{2} m \cdot \dot{x}^2$.

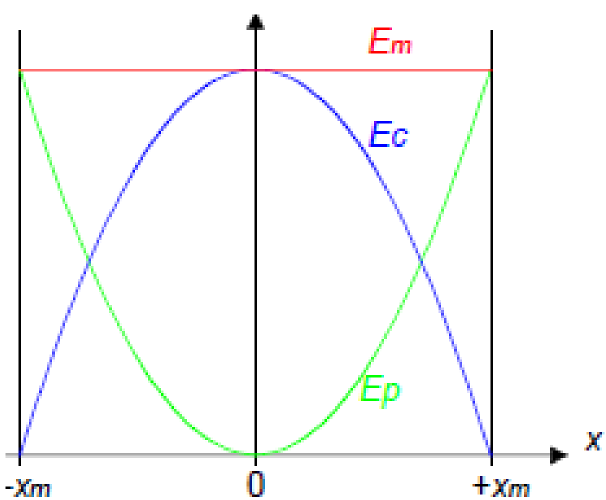
$$\dot{x} = x_m \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi).$$

En prenant pour état de référence la position d'équilibre ($x = 0$), l'énergie potentielle du système est $E_p = \dfrac{1}{2} k \cdot x^2$.

L'énergie mécanique du système est donnée par

$$E_m = E_c + E_p$$

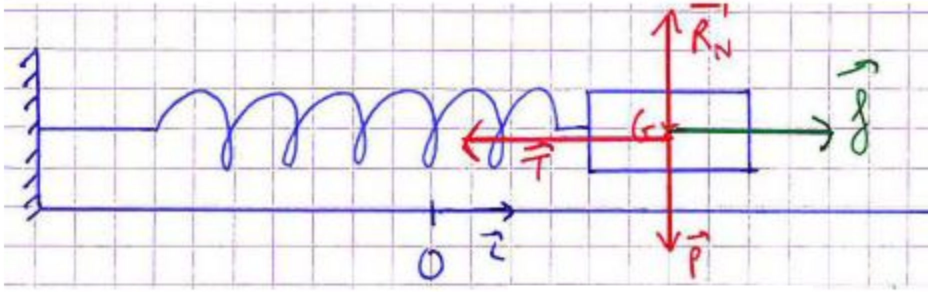
$$\boxed{E_m = \frac{1}{2} k \cdot x_m^2 = \frac{1}{2} m \cdot v_m^2}$$



Vm vitesse maximale du solide

Oscillateur mécanique libre amorti :

Régime pseudo-périodique : **faible amortissement**



la période reste sensiblement la même que celle de l'oscillateur libre amorti, l'amortissement influe uniquement sur l'amplitude.

$(\vec{f} = -\lambda\vec{v})$

2ème Loi de Newton : $\sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{a}$

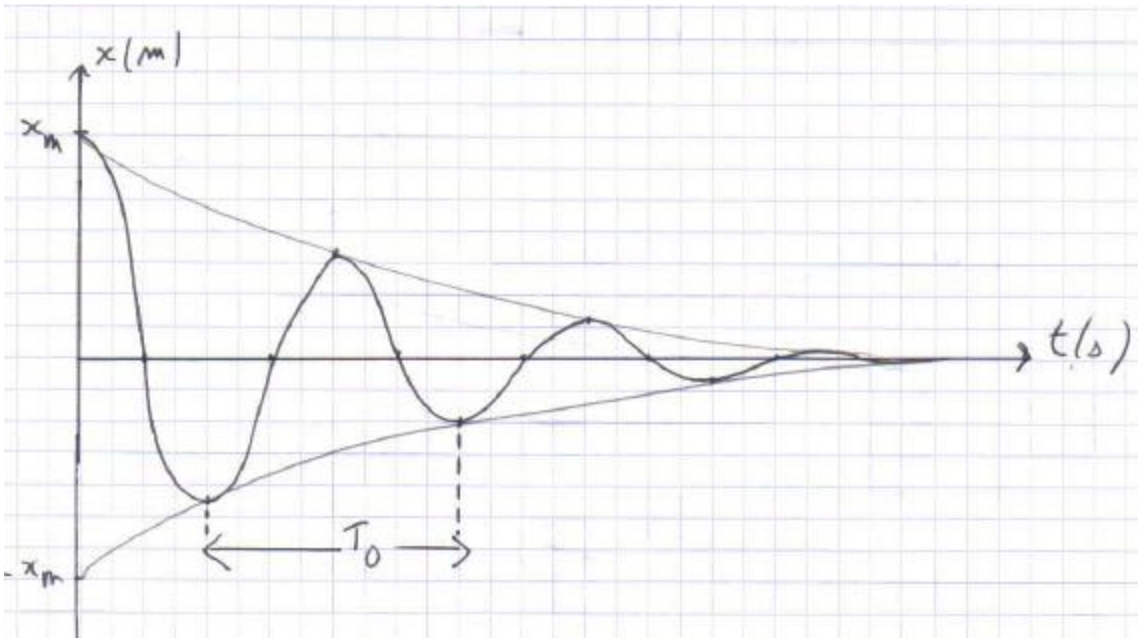
$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{R}_N + \vec{f} = m.\vec{a}$$

Projection sur Ox :

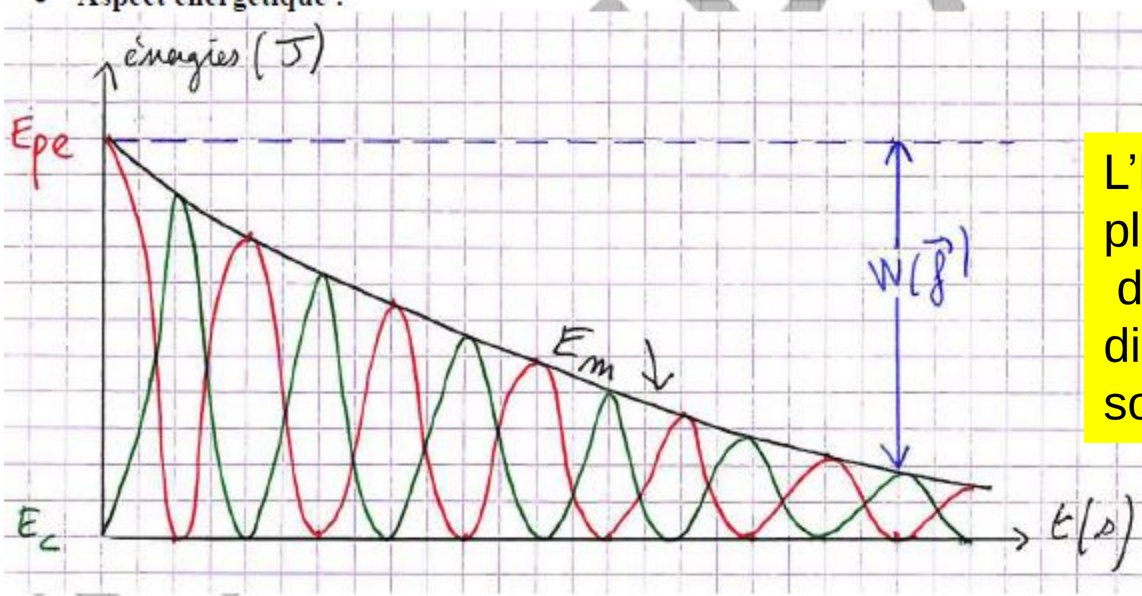
$$\ddot{x} + \frac{\lambda}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

La solution de cette équation pour un faible amortissement est

$$x(t) = x_m e^{-\frac{\lambda}{2m}} \cos(\omega_0 t + \varphi)$$



- **Aspect énergétique :**

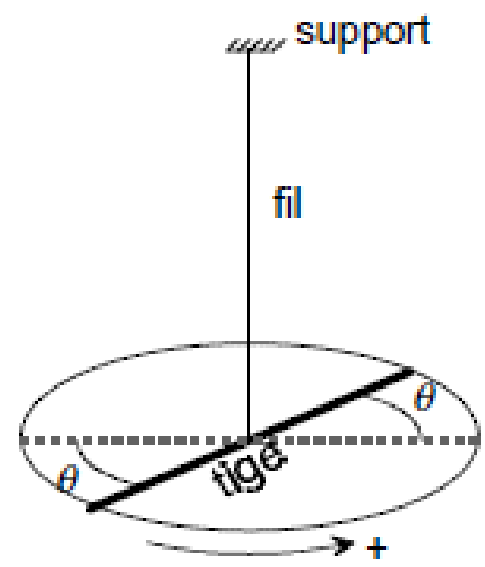


L'Energie Mécanique n'est plus conservée au cours des oscillations, elle est dissipée par les frottements sous forme de chaleur.

Pendule élastique de torsion

Étude dynamique

On considère un pendule de torsion constitué d'un fil, de constante de torsion C, et d'une tige fixée en son centre



Si l'on écarte la tige de sa position d'équilibre et qu'on la libère, elle se met à osciller autour de sa position d'équilibre

La tige est soumise au seul couple de torsion du fil : $\Gamma = -C \cdot \theta$

théorème du moment cinétique

$$J \cdot \ddot{\theta} = \Gamma = -C \cdot \theta \quad \text{avec} \quad \ddot{\theta} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{C}{J}}}$$

Une **solution de l'équation différentielle précédente est :** $\boxed{\theta = \theta_m \cos(\omega \cdot t + \varphi)}$

Conservation de l'énergie mécanique d'un oscillateur

L'énergie cinétique du système est $E_c = \frac{1}{2} J \cdot \dot{\theta}^2$.

L'énergie potentielle du système est (en prenant pour état de référence la position d'équilibre $\theta = 0$)

$$E_p = \frac{1}{2} C \cdot \theta^2.$$

L'énergie mécanique du système est donnée par $E_m = E_c + E_p$

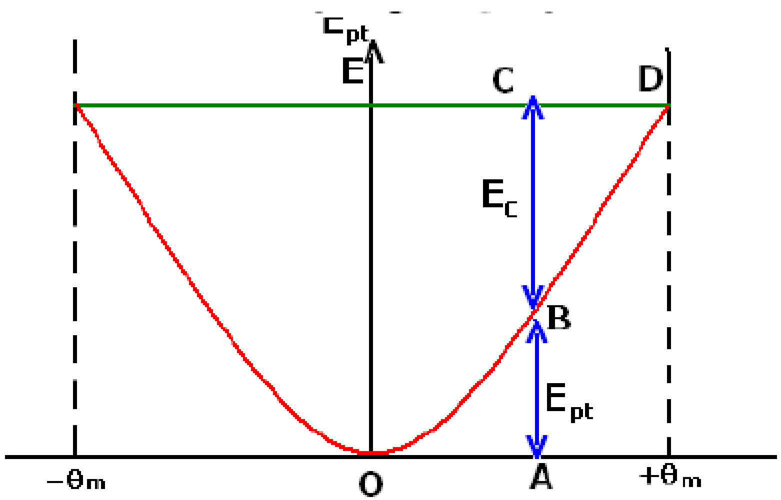
$$E_m = \frac{1}{2} J \cdot \omega^2 \theta_m^2 \sin^2(\omega \cdot t + \varphi) + \frac{1}{2} C \cdot \theta_m^2 \cos^2(\omega \cdot t + \varphi).$$ Or $\omega^2 = \frac{C}{J}$ d'où :

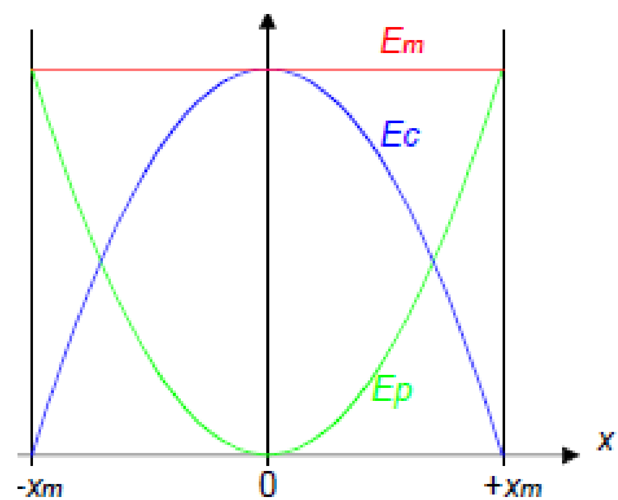
$$E_m = \frac{1}{2} C \cdot \theta_m^2 \left(\cos^2(\omega \cdot t + \varphi) + \sin^2(\omega \cdot t + \varphi)\right)$$

$$\boxed{E_m = \frac{1}{2} C \cdot \theta_m^2 = \frac{1}{2} J \cdot \dot{\theta}_m^2}$$

Le système est **conservatif.**

· Au cours des oscillations lorsque l'énergie potentielle augmente, l'énergie cinétique diminue et réciproquement



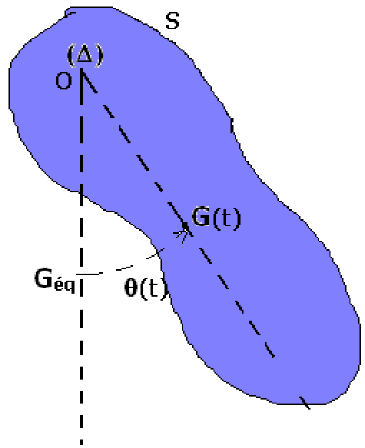


PENDULE PESANT.

Définition

Un pendule pesant est un solide mobile autour d'un axe D ne passant pas pa rson centre d'inertie.

Le pendule est mobile autour de l'axe Δ horizontal passant par O Il est lâché sans vitesse initiale lorsque OG fait avec la verticale l'angle θm, le pendule oscille. A une date quelconque OG fait avec la verticale l'angle θ



Les forces appliquées

$\vec{P}$ et $\vec{R}$

$$\vec{M}_o(\vec{P}) + \vec{M}_o(\vec{R}) = J\ddot{\theta}\vec{k}$$

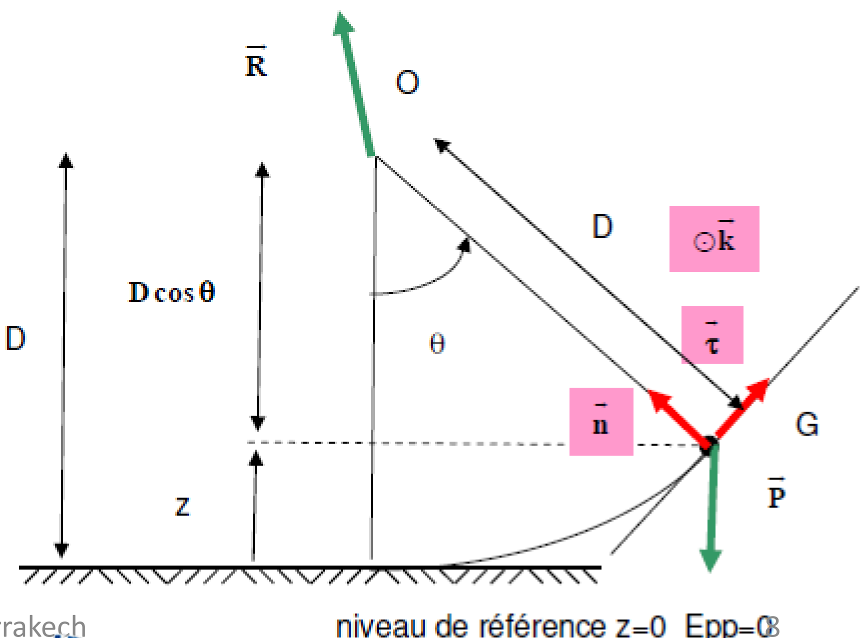
$$\vec{OG} \wedge m\vec{g} + \vec{OO} \wedge \vec{R} = J_\Delta \ddot{\theta}\vec{k}$$

$$-D\vec{n} \wedge (-mg\cos\theta\vec{n} - mg\sin\theta\vec{\tau}) + \vec{0} = J_\Delta \ddot{\theta}\vec{k}$$

$$\vec{0} + Dmg\sin\theta(\vec{n} \wedge \vec{\tau}) = J_\Delta \ddot{\theta}\vec{k} \qquad -Dmg\sin\theta\vec{k} = J_\Delta \ddot{\theta}\vec{k}$$

$$-Dmg\sin\theta = J_\Delta \ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{mgD}{J_\Delta}\sin\theta = 0$$



Pour des faibles oscillations

$$\ddot{\theta}+\frac{mgD}{J_\Delta}\theta=0 \qquad \frac{mgD}{L}=\omega_0{}^2$$

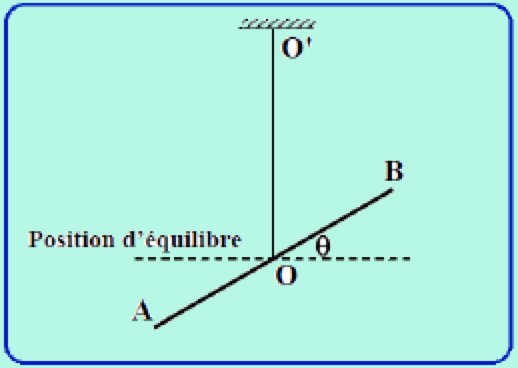
Si à $t=0$, $\dot{\theta}=0$ et $\theta=\theta m$

$$\theta=\theta m\cos(\sqrt{\frac{mgD}{J_\Delta}}t) \qquad T_0=2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{mgD}}$$

Application

Le but de l'exercice est de déterminer le moment d'inertie d'une tige homogène par rapport à un axe qui lui est perpendiculaire en son milieu et la constante de torsion d'un fil de masse négligeable. La tige a une masse M et une longueur AB=l=60 cm

La tige est écartée de sa position d'équilibre d'un angle faible θ_m dans le plan horizontal ; elle est lâchée sans vitesse à l'instant $t_0=0$.



1) Donner, à l'instant t , l'expression de l'énergie mécanique E_m du système

En choisissant le niveau de référence pour l'énergie potentielle de pesanteur Epp le niveau horizontal passant par le point 0 , nous aurons Epp = 0

- L'énergie potentielle élastique emmagasinée dans le fil de torsion $E_{pe} = \frac{1}{2}C\theta^2$
- L'énergie cinétique du pendule de torsion, en rotation autour de l'axe a pour expression : $E_c = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$

$$\boxed{E_m = E_c + E_{pp} + E_{pe} = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}C\theta^2}$$

a) Écrire l'expression de E_m quand $\theta = \theta_m$.

Lorsque la pendule s'écarte à sa position maximale θ_m sa vitesse angulaire est nulle. Ainsi l'énergie mécanique aura pour expression

$$E_m = \frac{1}{2} C\theta_m^2$$

Déterminer l'expression de la vitesse angulaire de [P] lors du passage par la position d'équilibre.

À cette position l'énergie potentielle élastique est nulle

$$E_m = \frac{1}{2} I\dot{\theta}_{max}^2$$

Pas de frottement donc conservation de l'énergie mécanique

$$\frac{1}{2} C\theta_m^2 = \frac{1}{2} I\dot{\theta}_{max}^2 \Rightarrow \dot{\theta}_{max}^2 = \frac{C}{I}\theta_m^2$$

$$\dot{\theta}_{max} = \pm\sqrt{\frac{C}{I}}\theta_m$$

Établir l'équation différentielle qui régit le mouvement de

$$E_m = \frac{1}{2} I\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} C\theta^2 = Constante$$

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 = \frac{1}{2} \times 2I\dot{\theta}\ddot{\theta} + \frac{1}{2} C \times 2 \times \theta\dot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{C}{I}\theta = 0$$

$$\theta = \theta_m \cos(\omega_1 t + \varphi)$$

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{C}}$$

1) *A l'aide d'un chronomètre, on mesure la durée t_1 de 20 oscillations et on obtient $t_1 = 20\ s$. Déterminer la relation entre I et C.*

$$T_1 = 1\,s = 2\pi\sqrt{\frac{I}{C}} \Rightarrow \sqrt{\frac{I}{C}} = \frac{1}{2\pi}$$

$$C = 40 \times I$$