

## Exercice 1

Soit la suite  $(U_n)_n$  définie par :

$$\begin{cases} U_0 = -1 ; U_1 = 2 \\ 6U_{n+2} = U_{n+1} + U_n \end{cases}$$

1) on pose  $2V_n = 2U_{n+1} - U_n$

a) montrer que  $(V_n)_n$  est une suite

géométrique de raison  $q = -\frac{1}{3}$  1.5 pt

b) en déduire que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 2U_{n+1} = U_n + 5\left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad 1 \text{ pt}$$

2) on pose  $W_n = U_n - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

a) montrer que  $(W_n)_n$  est une suite géométrique

de raison  $q' = \frac{1}{2}$  1.5 pt

b) en déduire que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} \quad 1 \text{ pt}$$

3) montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \sum_{k=0}^{k=n-1} U_k = \frac{7}{4} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} \quad 1.5 \text{ pt}$$

## Exercice 2

Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$

et on pose  $I = [1, 2]$

1) a) montrer que  $(\forall x \in I) \quad f(x) \in I$  1 pt

b) résoudre dans  $I$  l'équation  $f(x) = x$  1 pt

2) on considère la suite  $(U_n)_n$  définie par :

$$U_0 = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad U_{n+1} = f(U_n)$$

a) montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 1 \leq U_n \leq 2$  1 pt

b) montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \left|U_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leq \frac{1}{4} \left|U_n - \sqrt{2}\right| \quad 1 \text{ pt}$$

c) en déduire que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \left|U_n - \sqrt{2}\right| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n \quad 1 \text{ pt}$$

3) on pose  $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{k=n-1} U_k$  montrer que

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \left|S_n - \sqrt{2}\right| \leq \frac{4}{3n} \left(1 - \frac{1}{4^n}\right) \quad 1.5 \text{ pt}$$

4) on pose  $W_n = \frac{U_n - \sqrt{2}}{U_n + \sqrt{2}}$

a) montrer que  $(W_n)_n$  est une suite

géométrique de raison  $q = \frac{1 - \sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1}$  1 pt

b) en déduire que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n = \frac{(\sqrt{2} + 1)^{n+2} + (1 - \sqrt{2})^{n+2}}{(\sqrt{2} + 1)^{n+2} - (1 - \sqrt{2})^{n+2}} \times \sqrt{2} \quad 1 \text{ pt}$$

## BONUS

Soit  $(X_n)_n$  la suite réelle définie par :  $X_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{k^2}{3^k}$

1) calculer  $X_1$  et  $X_2$  1.5 pt

2) montrer que  $(X_n)_n$  est croissante 0.5 pt

3) a) montrer par récurrence que :

$$(\forall p \geq 3) \quad 2^{p+1} > p^2 \quad 1.5 \text{ pt}$$

b) en déduire que  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad X_n \leq \frac{23}{9}$  1.5 pt

On pose :  $U_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{n+k}$  ;  $V_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{k}{n^2+k}$

$$\text{et} \quad W_n = \sum_{k=3n+1}^{k=5n+1} \frac{1}{k}$$

1) Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad V_n \geq \frac{1}{2}$  2 pts

2) montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad W_n < \frac{2}{3}$  2 pts

3) montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad U_n < \frac{3}{4}$  2 pts