	Devoir 4	1 bac SM

Exercice 1 (3 pts)

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-4x-5}{x^2-25}$	$\lim\limits_{\substack{x\to -3\\ x>-3}}\dfrac{2x+9}{x^2+3x}$	$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2\sqrt{x}-\sqrt{x+5}-1}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x}+1}$

Exercice 2

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{xE(3x)-4}{x^2-1}$

1 pt — 1) a) montrer que $(\forall x\in]1,+\infty[)\quad \dfrac{3x-4}{x-1}<f(x)\leq\dfrac{3x^2-4}{x^2-1}$

0.5 pt — b) en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

1.5 pts — 2) déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

Exercice 3

On considère la fonction g définie par : $g(x)=x-\sqrt{x^2+2x}$

1.5 pts — 1) calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$

1.5 pts — 2) calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{g(x)}{x}$ puis montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)-2x=1$

2 pts — 3) étudier la dérivabilité de g à droite de 0 et à gauche de -2

Exercice 4

PARTIE (1) déterminer en fonction de n les deux sommes :

1.5 pts — $S_1=2^4+2^6+2^8+\dots\dots+2^{2n+4}$ و $S_2=2^3+2^4+2^5+\dots\dots+2^{n+3}$

PARTIE (2) Soit $(U_n)_n$ la suite définie par : $U_0=2$ et $U_{n+1}=1+4U_n+\sqrt{1+4U_n}$

0.5 pt — 1) a) prouver que $(\forall n\in\mathbb{N})\quad U_n>0$

0.5pt — b) montrer que la suite $(U_n)_n$ est croissante

2) on pose $(\forall n\in\mathbb{N})\quad V_n=\sqrt{1+4U_n}$

1.5 pts — montrer que $(\forall n\in\mathbb{N})\quad V_{n+1}^2=4\left(V_n+\dfrac{1}{2}\right)^2$ en déduire V_{n+1} en fonction de V_n

3) on pose $(\forall n\in\mathbb{N})\quad W_n=1+V_n$

1 pt — a) montrer que $(W_n)_n$ est une suite géométrique en déterminant sa raison

1 pt — b) prouver que $(\forall n\in\mathbb{N})\quad U_n=\dfrac{1}{4}\left(W_n^2-2W_n\right)$

0.5 pt — c) en déduire que $(\forall n\in\mathbb{N})\quad U_n=\dfrac{1}{4}\left(2^{2n+4}-2^{n+3}\right)$

1.5 pts — puis montrer que $\sum\limits_{k=0}^{k=n}U_k=\dfrac{1}{3}\times 2^{2n+4}-2^{n+2}+\dfrac{2}{3}$