

Exercice 1

Soit a un réel de $]1, +\infty[$ et on considère la suite $(U_n)_n$ définie par :

$$U_0 = 2 \text{ et } U_{n+1} = \frac{aU_n + 1}{U_n + a}$$

1) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n > 1$

2) montrer que la suite $(U_n)_n$ est décroissante

3) on pose $V_n = \frac{U_n + 1}{U_n - 1}$

a) montrer que $(V_n)_n$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{a+1}{a-1}$

b) exprimer V_n en fonction de n puis déduire que :

$$U_n = \frac{3(a+1)^n + (a-1)^n}{3(a+1)^n - (a-1)^n}$$

Exercice 2

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{2}{\sqrt{x-1}}$

1) a) déterminer D_f et calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

b) calculer les limites $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x)$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x)$

donner une interprétation graphique du résultat

2) étudier la branche infinie de la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$

3) montrer que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) + 2}{x} = -\infty$ puis interpréter graphiquement

le résultat

4) a) montrer que $(\forall x \in D_f - \{0\}) \quad f'(x) = \frac{(x+1)(\sqrt{x}-2)}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2}$

b) dresser le tableau de variations de f

5) tracer la courbe (C_f)

Exercice 3

Soit n un entier supérieur à 2 .

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}^+ par : $f(x) = \frac{x^n + 1}{(x+1)^n}$

1) montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

2) montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^+) \quad f'(x) = \frac{n(x^{n-1} - 1)}{(x+1)^{n+1}}$

3) a) montrer que f est croissante sur $]1, +\infty[$ et décroissante sur $[0, 1]$

b) dresser le tableau de variations de f

4) soient a et b deux réels de \mathbb{R}^{*+} .

En utilisant la fonction f déduire que $2^{n-1}(a^n + b^n) \geq (a+b)^n$

Exercice 4

Soit $(U_n)_{n>0}$ la suite définie par : $U_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} \sqrt{k}$

montrer que $(U_n)_{n>0}$ est strictement croissante