2017-2018	DEVOIR N°1	1 ÈRE BAC SM

EXERCICE (1)

On considère les propositions suivantes

P_1 " $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) : \quad x + 2y > 3$ "

P_2 " $(\exists z \in \mathbb{R}) \quad z - 1 < \dfrac{z}{z-1} \leq z$ "

P_3 " $(\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R}) : \left[(a \neq 1 \ et\ b \neq 1) \Rightarrow (a + b \neq 2) \right]$

1) donner la négation des propositions P_1 , P_2 et P_3 — 4 pts

2) donner la contraposée de l'implication définie dans la proposition P_3 — 1 pt

3) quelle est la valeur de vérité de la proposition P_3 ? — 1.5 pt

EXERCICE (2)

On pose $I = \left]-\infty, -2\right[$

1) montrer que $(\forall a \in I)(\forall b \in I) \quad ab + a + b > 0$ — 1.5 pt

2) en utilisant le raisonnement par contraposée montrer que :

$(\forall a \in I)(\forall b \in I) \ / \left[(a \neq b) \Rightarrow \left(\dfrac{a+1}{a^2 + 2a + 2} \neq \dfrac{b+1}{b^2 + 2b + 2} \right) \right]$ — 2 pts

EXERCICE (3)

En raisonnant par récurrence montrer que :

1) $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \sum_{k=1}^{k=n} k \times 2^{k-1} = 1 + 2^n (n-1)$ — 2 pts

2) $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \sum_{p=1}^{p=n} \dfrac{1}{4p^2 - 1} = \dfrac{n}{2n+1}$ — 2 pts

EXERCICE (4)

Utilisez le raisonnement par disjonction de cas et montrer que :

$(3 \text{ ne divise pas } n) \Rightarrow (3 \text{ divise } n^2 - 1)$ — 2 pts

EXERCICE (5)

Soient a et b deux nombres rationnels tels que $a \neq b$.

On pose $x = \dfrac{a + b\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1}$ (on rappelle que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$)

1) Montrer par l'absurde que $x \neq b$ — 1.5 pt

2) Montrer que $x \notin \mathbb{Q}$ (utilisez un raisonnement par l'absurde) — 1.5 pt