Mr : MANTI	1er semestre Contrôle N°1	Matière : mathématique Durée : 2 h Le 09/10/2019

Exercice 1

On considère les propositions :

P_1 "$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) : \ x + 2y > 0$ " P_2 "$(\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}) : \ x + 2y > 0$ "

1) Donner la négation des propositions P_1 ; P_2 — 2 pts

2) Déterminer la valeur de vérité de chacune des propositions P_1 et P_2 — 2 pts

Exercice 2

On considère la proposition (F) $(\forall \alpha \in \mathbb{R}^{*+})(\exists \beta \in \mathbb{R}^{*+})(\forall x \in \mathbb{R}) : (|x| \leq \beta \Rightarrow x^2 \leq \alpha)$

1) donner la négation de la proposition (F) — 1.5 pt

2) montrer que (F) est vraie — 1.5 pt

Exercice 3

1) montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^*)(\forall y \in \mathbb{R}^*) : (x \neq y \ et \ xy \neq 1) \Rightarrow \left(x + \frac{1}{x} \neq y + \frac{1}{y}\right)$ — 2 pts

2) en utilisant le raisonnement par disjonction de cas montrer que : — 2 pts

$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad |x - 2| \leq x^2 + x + 3$

3) montrer par l'absurde que $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ (on donne $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$) — 2 pts

4) montrer par récurrence que :

a) $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 1 + 3 + ... + (2n + 1) = (n + 1)^2$ — 2 pts

b) $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \sum_{k=1}^{k=2n} (-1)^k k^2 = n(2n + 1)$ — 2 pts

Exercice 4

Soient a et b deux réels . On considère la proposition :

$$Q \text{ " } \left[(\forall \alpha \in \mathbb{R}^{*+}) \ a < b + \alpha\right] \Rightarrow (a \leq b) \text{ "}$$

1) donner la négation de Q — 1 pt

2) donner la contraposée de Q — 1 pt

3) montrer que Q est vraie — 1 pt

BONUS : a et b deux réels strictement positifs montrer que $\frac{a}{a^4 + b^2} + \frac{b}{a^2 + b^4} \leq \frac{1}{ab}$