

Exercice 1

Soit $(U_n)_n$ la suite définie par $U_0 = 4$ et $U_{n+1} = \frac{5U_n + 3}{U_n + 3}$

on pose $V_n = \frac{U_n - 3}{U_n + 1}$

- 1) a) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n > 3$
b) montrer que la suite $(U_n)_n$ est décroissante
- 2) montrer que $(V_n)_n$ est une suite géométrique
- 3) exprimer V_n en fonction de n puis déduire U_n en fonction de n
- 4) calculer en fonction de n la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{4}{U_k + 1}$

Exercice 2

On considère les ensembles $A = \{5k + 3 / k \in \mathbb{Z}\}$

$B = \{3k' + 4 / k' \in \mathbb{Z}\}$ et $E = \{15q + 8 / q \in \mathbb{Z}\}$

- 1) vérifier que $13 \notin E$ et $13 \in A \cap B$
- 2) montrer que $E \subset A$. est-ce que $A = E$?
- 3) déterminer $A \cap B$

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \sqrt{x^2 + 2|x|} + x$

- 1) montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ interpréter graphiquement le résultat

- 2) a) calculer les limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$
b) étudier la branche infinie de la courbe (C_f) en $+\infty$
- 3) étudier la dérivabilité de f à droite et à gauche de 0
- 4) a) calculer la fonction dérivée $f'(x)$ pour de \mathbb{R}^{*-} et de \mathbb{R}^{*+}
b) montrer que f est croissante sur $]0, +\infty[$ et décroissante sur $]-\infty, 0[$ puis dresser le tableau de variations
- 5) tracer la courbe (C_f) et la demi-tangente au point d'abscisse 0

Exercice 4

On pose $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{x + y\sqrt{2} / (x, y) \in \mathbb{Q}\}$

- 1) soient a et b deux éléments de \mathbb{Q} tels que $a + b\sqrt{2} = 0$
montrer que $a = 0$ et $b = 0$
- 2) on considère l'application F définie de \mathbb{Q}^2 vers $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$
Par : $(\forall (x, y) \in \mathbb{Q}^2) \quad F((x, y)) = x + y + 2y\sqrt{2}$
 - a) montrer que F est injective
 - b) montrer que F est une bijection de \mathbb{Q}^2 vers $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ et déterminer sa réciproque