MANTI	Devoir 2	$1^{ère}$ BAC SM

Exercice 1

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $\begin{cases} f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1} & ; \quad |x| \geq 1 \\ f(x) = \dfrac{x + \sqrt{1 - x^2}}{|x|} & ; \quad 0 < |x| < 1 \end{cases}$

1) a) calculer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

b) interpréter graphiquement les résultats obtenues

2) calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ puis montrer que la droite (Δ) $y = 2x$ est une asymptote oblique à (C) en $+\infty$

3) a) étudier la dérivabilité de f à droite et à gauche de 1 et donner une interprétation graphique

b) étudier la dérivabilité de f à droite et à gauche de -1 et donner une interprétation graphique

4) a) calculer $f'(x)$ pour x de $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

b) montrer que f est décroissante sur $]-\infty, -1[$ et qu'elle est croissante sur $]1, +\infty[$

5) a) montrer que $(\forall x \in]0,1[)$ $f'(x) = \dfrac{-1}{x^2\sqrt{1 - x^2}}$ et déduire le sens de variation de f sur $]0,1[$

b) calculer $f'(x)$ pour x de $]-1, 0[$ puis montrer que f est croissante sur $]-1, 0[$

6) dresser le tableau de variations de la fonction f

7) a) résoudre dans $]-1, 0[$ l'équation $f(x) = 0$ et interpréter le résultat graphiquement

b) tracer la courbe (C)

Exercice 2

Soit $(U_n)_n$ la suite définie par $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = \sqrt{3U_n + 4}$

1) a) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $0 \leq U_n < 4$

b) montrer par récurrence que $(U_n)_n$ est croissante

2) soit f la fonction définie sur $[0, 4]$ par $f(x) = \dfrac{3}{4 + \sqrt{3x + 4}}$

Étudier le sens de variation de f sur $[0, 4]$ et déduire que $(\forall x \in [0, 4])$ $f(x) \leq \dfrac{1}{2}$

3) a) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $4 - U_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}(4 - U_n)$

b) montrer que $4 - U_n \leq 4\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

4) on pose $S_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{k=n} U_k$. montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $4 - \dfrac{4}{n} + \dfrac{4}{2^n\, n} \leq S_n \leq 4$