

Exercice 1 : (9 points) Calculer les limites suivantes :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + x - 1}{x^3 - 5} & ; \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 - x - 4}{\sqrt{x+5} + 2x} & ; \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{10 - 5x}{x^2 - 6x + 9} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{5x^3 + x - 1}}{2x + 1} & ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^4 - 2x^3 + 1} - x & ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{2x^2 - x + 1} + 3x \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 - x + 2} - 2x & ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{x \sin 3x} & ; \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\tan(x - 2)}{x^2 - 4} \end{aligned}$$

Exercice 2 (5 points) : Soit la suite définie par

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{2U_n - 1}{2U_n + 5} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

1. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n > -1$ (1 pt)
2. On pose $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad V_n = \frac{2U_n + 1}{U_n + 1}$
 - a. Montre que (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{3}{4}$ (1,5 pt)
 - b. Calculer V_n en fonction de n (0,5 pt)
 - c. Déduire U_n en fonction de n (1 pt)
 - d. Calculer $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$ en fonction de n (1 pt)

Exercice 3 : (6 points) On pose $A(x) = \sqrt{3}(4 \cos^4 x + \sin^2 2x) - 2 \sin 2x \quad (\forall x \in \mathbb{R})$

1. Calculer $A\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $A\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ (1 pt)
2. a. Montre que : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad 4 \cos^2 x - \sin^2 2x = 4 \cos^4 x$ (1 pt)
b. En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad A(x) = 4 \cos x (\sqrt{3} \cos x - \sin x)$ (1 pt)
3. Montrer que : $\forall (x \in \mathbb{R}) \quad A(x) = 8 \cos x \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ (1 pt)
4. a. Résoudre dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$: $A(x) = 0$ (1 pt)
b. Résoudre dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$: $A(x) > 0$ (1 pt)

Bonne Chance