LYCÉE JAÂFAR EL-FASSI EL-FIHRI
1ER SE 2
DURÉE : 2H

1er Devoir surveillé

Exercice 1 (4 Points).
Soient P et Q deux propositions.

1. Montrer que $P \Rightarrow \left(\overline{P} \Rightarrow Q\right)$ est une implication vraie.
2. Montrer par l'absurde que la fonction
$$f(x) = x + \frac{1}{x^2+1}$$
est non majorée.

Exercice 2 (4 Points).
Montrer que

1. $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$.
2. En utilisant le raisonnement par disjonction des cas, montrer que le nombre $n\left(n^4-1\right)$ est divisible par 5 quelque soit $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 (6 Points).
Soient f une fonction numérique définie par
$$f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$$

1. (a) Déterminer l'ensemble de définition de f.
   (b) Soient x et y deux nombres réels différents, montrer que
   $$f(x) - f(y) = \frac{2\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{y}+1\right)}$$
   (c) Déduire que f est croissante sur D_f.
2. Montrer que f est bornée par -1 et 1.
3. On considère la fonction numérique h définie sur $\mathbb{R}_+$ par
$$h(x) = \frac{\sqrt{x^3}-1}{\sqrt{x^3}+1}$$
étudier la variation de h.

Exercice 4 (6 Points).
On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = \frac{x-1}{2x}$$

1. (a) Montrer que f est minorée sur $[-1, 0[$.
   (b) Résoudre dans $\mathbb{R}^*$ l'équation $f(x) = -x$.
   (c) Montrer que 1 est une valeur minimale de f sur $[-1, 0[$.
2. Soit g une fonction périodique de période 1 définie sur $\mathbb{R}$ par
$$g(x) = f(x) \qquad (\forall x \in [-1, 0[)$$
tracer la courbe $(\mathcal{C}_g)$ dans un repère orthonormal.

1 point supplémentaire sur la bonne présentation de la copie