CONTRÔLE N°1 DU 1er SEMESTRE

Exercice 1

$$\begin{cases} f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)\sqrt[3]{x^2 - 2x + 2}, & x \leq 1 \\ f(x) = \sqrt{x^2-1}\,.\,\text{Arctan}\,x + \text{Arctan}\sqrt{x^2-1}, & x > 1 \end{cases}$$

0,5 1 - Etudier la continuité de f en 1

2 2 - Etudier la dérivabilité de f en 1 et interpréter les résultats obtenus.

3 - On pose $U(x) = 2x^3 - x^2 - 4x + 6$

1 a - Etudier les variations de U sur $\mathbb{R}$

1 b - Montrer que $U(x) = 0$ admet une seule solution α dans $\mathbb{R}$

1 c - En déduire que $\alpha \in \left]-\sqrt{3}, -\frac{5}{3}\right[$ et déterminer le signe de $U(x)$ sur $\mathbb{R}$

1,5 4 - Mq $f'(x) = \dfrac{U(x)}{3x^2\sqrt[3]{x^2-2x+2}}$, $\forall x < 1$

1,5 5 - Déterminer $f'(x)$, $\forall x > 1$ et Dresser le T.V de f sur $\mathbb{R}$

1,5 6 - a - Etudier les branches infinies de C_f au voisinage de $-\infty$

1,5 b - Mq $y = \frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2} - 1$ est une asymptôte de C_f au voisinage de $+\infty$

1,5 7 - Mq $f(x) \leq x - 1$, $\forall x \in [0, 1]$.

1 8 - Tracer C_f (on prend $f(0) = 1,8$)

9 - Soit g la restriction de f sur $I =]1, +\infty[$

1 a - Mq g est bijective de I vers un intervalle J à déterminer

1 b - Tracer $C_{g^{-1}}$

1 c - Mq g^{-1} est dérivable sur J et calculer $(g^{-1})'(0)$

Exercice 2

1 1 - Mq $\forall x \in \mathbb{R}$, $\text{Arctan}\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right) + \text{Arctan}\,x^2 = \dfrac{\pi}{4}$

2 - En utilisant T.A.F :

1 a - calculer $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\text{Arctan}(x^2+x-1) + \frac{\pi}{4}}{x^2+3x}$

1 b - Mq $\dfrac{p}{(n+1)^{1-p}} < (n+1)^p - n^p < \dfrac{p}{n^{1-p}}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0, 1[$