

Ex 1 :

Soit f la fonction numérique définie sur \mathbb{R} par :

$$\begin{cases} f(x) = x - 1 + \sqrt{x^2 + 1} & \text{si } x < 0 \\ f(x) = \sqrt[3]{x} - \text{Arctan } x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- 1) Étudier la continuité de f en 0.
- 2) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+) \text{Arctan } x \leq x$
- 3) a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$:

$$\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \leq x - \text{Arctan } x \leq \frac{x^3}{3}$$

- b) Calculer la limite : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \text{Arctan } x}{x^3}$
- c) Étudier la dérivabilité de la fonction f en 0.
- 4) Étudier les variations de la fonction f
- 5) On note \mathcal{C} la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
 - a) Étudier les branches infinies de la courbe \mathcal{C} .
 - b) Construire la courbe \mathcal{C} (On donne : $\sqrt[3]{\frac{1}{3}} \approx 0,7$)
- 6) Soit g la restriction de la fonction f sur $I = \mathbb{R}^+$.
Montrer que g réalise une bijection de I sur un intervalle J à déterminer puis déterminer l'expression de $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$

Ex 2 :

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[3]{x-1} - \sqrt[3]{x}} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \left(x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}} \right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\text{II) Montrer que : } 2\text{Arctan}(2) + \text{Arctan}\left(\frac{4}{3}\right) = \pi$$

III) Montrer que pour tout $x \in]1; +\infty[$:

$$\text{Arctan}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) = 2\text{Arctan}(x) - \pi$$

Soit f une fonction numérique continue sur $[a, b]$.

Montrer qu'il existe au moins un réel $c \in]a, b[$ tel que

$$f(c) = \frac{1}{a-c} + \frac{1}{b-c}$$

bonne chance