

CONTRÔLE N°2 DU 1^{er} SEMESTRE

EX 1

On considère la fonction numérique f_n définie sur \mathbb{R}^+

par : $f_n(x) = x - n + \frac{n}{2} \ln x$ où $n \in \mathbb{N}^*$

1,5

1) Étudier les variations de la fonction f_n .

1,5

2) a) Montrer qu'il existe un unique réel strictement positif α_n tel que $f_n(\alpha_n) = 0$.

1

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) 1 \leq \alpha_n < e^2$

1,5

3)

que $\alpha_{n+1} > \alpha_n$ et

: Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est convergente.

1,5

4) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha_n) = 2$.

EX 2

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}^+ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\ln x}{\ln^2 x + \ln x + 1} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Et soit \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

1

2) Montrer que f est continue à droite en 0.

1,5

3) Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 0 puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

1,5

4) Étudier les variations de la fonction f .

1

5) Ecrire l'équation de la tangente (T) à la courbe \mathcal{C} au point d'abscisse 1.

1,5

6) Tracer la courbe \mathcal{C} .

1

7) Soit g la restriction de f à l'intervalle $I = \left[\frac{1}{e}; e \right]$.

1

Montrer que g réalise une bijection de I sur un intervalle J à déterminer.

8) Montrer que g^{-1} est dérivable en 0 puis déterminer

$(g^{-1})'(0)$.

EX 3

Déterminer les fonctions primitives des fonctions suivantes.

1

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 6}$$

1

$$g(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + x + 1}{x^2 - 4x + 6}$$