

Exercice 1:

$$(E): Z^3 + (-8+i)Z^2 + (17-8i)Z + 17i = 0$$

1. Déterminer a, b etc tels que

$$Z^3 + (-8+i)Z^2 + (17-8i)Z + 17i = (Z+a)(iZ^2 + bZ + c)$$

2. Résoudre (E).

3. On pose $A(4+i), B(4-i), C(-2)$
 O le centre

$R(O, \frac{\pi}{2})$ la rotation de centre O
 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a. Déterminer S le point image de A par R .

b. Mq A, B, C, S appartiennent à un cercle \mathcal{C} à déterminer

4) à tous points $M(Z) / Z \neq 2$, on associe le point $M'(Z') / Z' = \frac{2Z+10-2i}{Z-2}$

a) Déterminer les affixes de A', B', C' associés à A, B, C

b) Mq A', B', C' appartiennent au même cercle \mathcal{C}' dont on déterminera le centre et le rayon.

c) Mq $|Z'-2| = 2\sqrt{5}$ si $M(Z) \in \mathcal{C}$

d) En déduire $M'(Z')$ appartient à un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

Exercice 2:

On définit sur $E = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ la loi suivante.

$$\forall (x, y) \in E^2, x * y = x + y - 2xy$$

1. Mq $*$ est une L.e.T

2. Mq $*$ est commutative, associative admet un élément neutre et que tous les éléments de E sont symétrisables.

3. Mq $\forall x \in E, \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$
 $\underbrace{x * x * \dots * x}_{n \text{ fois}} = \frac{1}{2} \left[1 - (1-2x)^n \right]$

4. Soit $F = \left\{ M_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{pmatrix} / x \in E \right\}$

Mq F est stable de $(M_3(\mathbb{R}), \times)$

5. on considère l'application

$$f: E \rightarrow F$$

$$x \mapsto M_x$$

a. Mq f est un isomorphisme de $(E, *) \rightarrow (F, \times)$

b. En déduire la structure de (F, \times)

c. On note $B = M(\frac{1}{2})$

$$Mq B^n = M\left(\frac{1-2^n}{2}\right)$$

$$\text{et que } (B^n)^{-1} = M\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$