Groupe scolaire Inisse 2017-2018

Matière: Mathématiques — Le 8/3/2018

Contrôle N° 1 — 2 Bac -SM-

Semestre 2 — Durée: 2h00

## Exercice 1 :

$\forall m \in \mathbb{C}^*$, $E_m : z^2 - (2m+1+i)z + m(m+1+i) = 0$

1- Vérifier que $z_1 = m$ est une solution de $(E_m)$ et déterminer $z_2$

2- Mq $|z_1| = |z_2| \Leftrightarrow Im(m) + Re(m) = -1$

3- Soient $A(m)$, $B(m+1+i)$, $C(m-2+2i)$ et $f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$, $M(z) \longmapsto M'(z')$ / $z' = 2iz + m - 2im$

a – Déterminer la nature de $f$ et ses éléments caractéristiques.

b – Mq $f(B) = C$ et en déduire la nature de $(ABC)$

4 – Soit $D\left(m + \frac{2}{5}(1+3i)\right)$

a – Mq $B$, $C$ et $D$ sont alignées et que $(AD) \perp (BC)$

b – En déduire $|z_D - z_A||z_C - z_B| = |z_B - z_A| \times |z_C - z_A|$

## Exercice 2 :

On considère dans $\mathbb{Z}$ : $29x + 13y = 1$. $(E)$

1 – Mq $(E)$ admet au moins une solution ds $\mathbb{Z}^2$

2 – Résoudre $(E)$.

3 – Soit $n \in \mathbb{N}$ / $10^n \equiv 3\ [29]$

a – Mq $10^{28} \equiv 1\ [29]$

b – Mq $10^{n+1} \equiv 1\ [29]$

c – On pose $d = (n+1) \wedge 28$

Mq $10^d \equiv 1\ [29]$ et que $d = 28$

## Exercice 3 :

$g(x) = \dfrac{2x}{x + \ln(x+1)}$, si $x > 0$ ; et $g(0) = 1$

1 – Mq $g$ est continue en $0$ à droite.

2 – Mq $\ln(1+x) > \dfrac{x}{x+1}$, $\forall x > 0$

3 – Calculer $\lim\limits_{+\infty} g(x)$ et dresser le TV de $g$.

4 – $\forall x > 0$ on pose $G(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{x^2} g(t)\,dt$ et $G(0) = 0$

a – Étudier la dérivabilité de $G$ en $0$ à droite et interpréter le résultat obtenu.

b – Mq $G$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer $G'(x)$,

c – Déterminer les variations de $G$.

5 – On pose $U_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{k}{k + n\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)}$, $n \in \mathbb{N}^*$

a – Calculer $\lim U_n$ en fonction de $G$

b – On pose $\lim U_n = l$

Vérifier que $\frac{1}{2} \leq l < 1$.