Groupe scolaire Inisse

Mathématiques

DS 4

Branche : 2 SM
Durée : 2h

Exercice 1 :

on considère l'application φ définie par :

$\varphi : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$

$M(z) \longmapsto M'(z') \ / \ z' = \left(\frac{3+i\sqrt{3}}{4}\right)z + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$

1 – Montrer que $A(2)$ est le seul point invariant par φ.

2 – Montrer que $AM' = \frac{\sqrt{3}}{2} AM$ et : $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$.

3 – Montrer que le triangle (AMM') est rectangle en M'

4 – Expliquer comment situer M' si on connaît le lieu de M dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$

5 – Déterminer la nature de φ.

6 – Déterminer l'image du cercle $\mathcal{C}(O, 1)$ par φ.

7 – On considère la suite $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ définie par $\varphi_1 = \varphi$ et $\varphi_{n+1} = \varphi \circ \varphi_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et on pose $M_n = \varphi_n(O)$ et z_n l'affixe de M_n

a – Déterminer z_1 et vérifier que $M_{n+1} = \varphi(M_n)$

b – En déduire que $z_n = -2\left(\frac{3+i\sqrt{3}}{4}\right)^n + 2$

c – Déterminer les valeurs de n pour que $M_n \in D(O, \vec{i})$

Exercice 2 :

1 – Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$: $11x - 7y = 1$

2 – En déduire les solutions de $\begin{cases} x \equiv 1 [11] \\ x \equiv 2 [7] \end{cases}$ (E)

3 – Soient p et q deux nombre premiers positifs. et $a \in \mathbb{N}^*$ / $p \wedge a = 1$ et $q \wedge a = 1$

et on considère l'équation : $ax \equiv 1 [pq]$ E'

a – Mq $a^{(p-1)(q-1)} \equiv 1 [p]$ et $a^{(p-1)(q-1)} \equiv 1 [q]$

b – En déduire $x_0 = a^{(p-1)(q-1)-1}$ est une solution de (E').

e – Mq $(E') \Longleftrightarrow ax \equiv ax_0 [pq]$

d – En déduire les solutions de E'

f – Résoudre dans $\mathbb{Z}$; $10x \equiv 1 [33]$

40