

EXERCICE 1 : (les questions de cet exercice sont indépendantes)

2pts 1) Simplifier les nombres suivants :

$$A = 3 \ln(e^2) + 2 \ln(\sqrt{e})$$

$$B = \ln(\sqrt{5} - \sqrt{3}) - \ln\left(\frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}\right) - \ln(2)$$

2pts 2) Soit f la fonction numérique définie par : $f : x \mapsto \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$

Montrer que le point $\Omega\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ est un centre de symétrie de la courbe (C_f)

4pts 3) résoudre dans \mathbb{R} les équations et les inéquations suivantes :

a) $2 \ln(x-3) = \ln(x+3)$; b) $1 - 2 \ln(x) = 0$; c) $\frac{\ln(x)}{2-x} < 0$

d) $2 \ln^2(x) + 3 \ln(x) - 5 < 0$

3pts 4) Calculer $f'(x)$ pour tout x de l'intervalle I dans les cas suivants :

a) $\begin{cases} f(x) = x \ln(x) \\ I =]0, +\infty[\end{cases}$; b) $\begin{cases} f(x) = x - \ln^3(x) \\ I =]0, +\infty[\end{cases}$

c) $\begin{cases} f(x) = \ln\left(x + \frac{1}{x}\right) \\ I =]0, +\infty[\end{cases}$

4pts 5) Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{2x^2 + 1}{x^2 + 4}\right)$; b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \ln(x)}{1 + 2 \ln(x)}$ c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3x)}{x}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} - \ln(x)$; e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - \ln(x)$; f) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln^2(x)$

EXERCICE 2 : (5pts)

Soit f la fonction numérique définie sur \mathbb{R} par :

$$f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 1} + \frac{4}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

0,5pt 1) a) vérifier que f est une fonction paire

1 pt b) Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$ et interpréter géométriquement le résultat

1pt 2) a) Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R} et que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f'(x) = \frac{x(x^2 - 3)}{(1 + x^2)(\sqrt{1 + x^2})}$$

0,5 pt b) Donner le tableau de variation de f sur \mathbb{R}^+

3) Soit g la restriction de f sur l'intervalle $[0, \sqrt{3}]$

0,5pt a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer

0,5pt b) Calculer $g(1)$ et calculer $(g^{-1})'(3\sqrt{2})$

1pt 4) Construire dans un repère orthonormé (o, \vec{i}, \vec{j}) les courbes (C_f) et $(C_{g^{-1}})$