

**EXERCICE 1 (15 pts)**

2 pts 1) Simplifier les expressions suivantes :

$$A = \ln(e^3) + 2\ln(3e) + \ln\left(\frac{1}{9}\right) \quad , \quad B = \ln(\sqrt{3-\sqrt{2}} + 1) + \ln(\sqrt{3-\sqrt{2}} - 1) + \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

4,5 pts 2) Résoudre dans l'ensemble  $\mathbb{R}$  les équations et les inéquations suivantes :

a)  $\ln(2x) = \ln(x)$  , b)  $1 + 2\ln(x) > 0$  , c)  $(\ln(x))(2 - \ln(x)) > 0$  , d)  $\ln^2(x) - \ln(x) - 2 = 0$

4 pts 3) Calculer  $f'(x)$  pour tout  $x$  de l'intervalle  $I$  dans les cas suivants :

a)  $f(x) = \sqrt{x} + \ln(x)$  , b)  $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$  , c)  $f(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$  , d)  $f(x) = \ln(x^2 + x + 4)$

$I = ]0, +\infty[$

$I = ]1, +\infty[$

$I = ]0, 1[$

$I = \mathbb{R}$

4,5 pts 4) Calculer les limites suivantes :

a)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x + \ln^2(x)$  , b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \ln(x)$  , c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{\ln(x)}{x^3}$  , d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln\left(\frac{1+x^2}{2+x^2}\right)$

e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x^3 + x + 2 + \ln(x)$  , f)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln^3(x)$

**EXERCICE 2 (5 pts)**

Soit  $f$  la fonction numérique définie par :  $f(x) = x\sqrt{x^2 - 1}$

Et soit  $(C)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (unité 2cm)

0,5 pts 1) Montrer que le domaine de définition de la fonction  $f$  est :  $D_f = ]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

0,5 pts 2) Montrer que la fonction  $f$  est impaire

0,75 pts 3) a) Montrer que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  et que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$  et interpréter le résultat

$\frac{1}{2}$

0,5 pts b) Montrer que :  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{x-1} = +\infty$  et interpréter géométriquement le résultat

0,5 pts 4) a) Montrer que  $f$  est dérivable sur l'intervalle  $]1, +\infty[$  et que :

$$(\forall x \in ]1, +\infty[) \quad f'(x) = \frac{2x^2 - 1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

0,25 pts b) Dédurre que la fonction  $f$  est strictement croissante sur l'intervalle  $]1, +\infty[$

1 pt 5) Tracer la courbe  $(C)$  (on admet que la courbe  $(C)$  admet deux points d'inflexion :  $A\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, f\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\right)$

$$\text{Et } B\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, f\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\right)$$

6) Soit la fonction  $g$  restriction de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $]1, +\infty[$

0,5 pts a) Montrer que la fonction  $g$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$  en déterminant son domaine de

Définition

0,5 pts b) Montrer que la fonction  $g^{-1}$  est dérivable en  $\sqrt{2}$  puis calculer  $(g^{-1})'(\sqrt{2})$

( Remarquer que  $g(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$  )