Groupe scolaire Inisse

Matière: Mathématiques
Evaluation 3
1 Session

Le 05/01/2017
2 Bac - SP-
Durée: 2h00

EXERCICE 1 : (2pts)

1 1) Calculer la limite de la suite (u_n) définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $u_n = \frac{\cos(n)}{\sqrt{n}} - \left(\frac{2}{3}\right)^n + 1$

1 2) Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $u_n = \frac{1}{3} + (-1)^n \frac{\cos(n)}{\sqrt{n}}$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

Montrer que : $\left|u_n - \frac{1}{3}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ et déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

EXERCICE 2 : (4 pts)

Soit la suite $(u)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \frac{5u_n - 4}{u_n + 1}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

0,5 1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$ $u_n \succ 2$

1 2) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et qu'elle est convergente

3) On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_n = \frac{1}{u_n - 2}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

1 a) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $\frac{1}{3}$

1 b) Calculer v_n en fonction de n et montrer que $u_n = \frac{3 + \frac{2}{3}n}{1 + \frac{1}{3}n}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

0,5 c) Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

EXERCICE 3 : (5 pts)

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_{n+1}=\frac{5}{6}u_n+\frac{1}{6}$, $n\in\mathbb{N}$ et $u_0=2$

0,5 1) Montrer que $(\forall n\in\mathbb{N})\quad u_n\succ 1$

1 2) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante et qu'elle est convergente

3) On pose $(\forall n\in\mathbb{N})\quad v_n=u_n-1$

1 a) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q=\frac{5}{6}$ et déterminer v_0

1,5 b) déduire que $u_n=1+\left(\frac{5}{6}\right)^n$ $(\forall n\in\mathbb{N})$ et calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

1 c) Calculer $S_n=u_0+u_1+u_2+\dots\dots\dots\dots+u_n$ et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$ (remarquer que $u_n=v_n+1$)

EXERCICE 4 (9 pts)

1ere partie :

On considère la fonction numérique h définie sur l'intervalle $I=]0,+\infty[$ par :

$$h(x)=x^2-1+2\ln(x)$$

1 1) Montrer que h est strictement croissante sur $]0,+\infty[$

1 2) Calculer $h(1)$ et déduire que : $h(x)\leq 0\quad(\forall x\in]0,1])$ et que :

$$h(x)\geq 0\quad(\forall x\in[1,+\infty[)$$

2eme partie :

On considère la fonction f définie sur $I=]0,+\infty[$ par :

$$f(x)=\ln(x)-\frac{\ln(x)}{x^2}$$

Soit $\left(C_f\right)$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1 1) Montrer que : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ et interpréter géométriquement le résultat

1 2) a) Montrer que $\left(\forall x \in \left]0,+\infty\right[\right) \quad f'(x) = \dfrac{h(x)}{x^3}$

0,5 b) Déduire que f est strictement croissante sur l'intervalle $\left[1,+\infty\right[$ et strictement décroissante sur L'intervalle $\left]0,1\right]$

1 c) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et donner le tableau de variation de f

0,5 3) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ et interpréter géométriquement le résultat

1 4) Tracer la courbe $\left(C_f\right)$ dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

0,5 5) Soit g la restriction de f à $\left[1,+\infty\right[$

0,5 a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J qu'on détermine

0,5 b) Calculer $g(e)$ et $\left(g^{-1}\right)'\left(1-\dfrac{1}{e^2}\right)$

0,5 c) Tracer $\left(C_{g^{-1}}\right)$ dans le même repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$