Lycée ANISSE	D.S.N°3	$\frac{1}{2}$	2.B.A.C.S.P

6pts — Exercice N°1 : on Considère la suite (U_n) définie par : $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = \frac{1}{7}U_n + 3 \, / n \in \mathbb{N}$

0,5 — 1°/ Vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N})$: $U_{n+1} - \frac{7}{2} = \frac{1}{7}\left(U_n - \frac{7}{2}\right)$

1 — 2°/ a- Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N})$: $U_n < \frac{7}{2}$

1 — b- Montrer que la suite (U_n) est Croissante.

0,5 — c- Déduire que la suite (U_n) est Convergente

3°- on pose $V_n = U_n - \frac{7}{2} \quad / n \in \mathbb{N}$

1,5 — a- Montrer que la suite (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{7}$; puis exprimer V_n en fonction de n.

1,5 — b- Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$: $U_n = \frac{7}{2} - \frac{5}{2}\left(\frac{1}{7}\right)^n$, puis calculer sa limite.

4pts — Exercice N°2 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations suivantes.

$\ln(x^2+5) = \ln(x+2) + \ln(2x)$	$(2-x)\ln x > 0$	$2 - \ln(x) = 0$

3pts — Exercice N°3 : Calculer les limites suivantes

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+2x)}{x}$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln^3(x)}{x}$	$\lim\limits_{x \to -\infty} \ln(2x^2+1)$	$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} + \ln x$

7pts — Exercice N°4 : Ⓐ Soit g la fonction numérique définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = x - \frac{1}{2}\ln(x)$

Lycée ANISSE	D.S N° 3	$\frac{2}{2}$	2.B.A.C.S.P

0,5 1° - a - Montrer que $(\forall x>0) : g'(x) = \frac{2x-1}{2x}$

0,5 b - En déduire que la fonction g est croissante sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$ et décroissante sur $]0, \frac{1}{2}]$

0,5 c - Montrer que $(\forall x>0) : g(x) > 0$ (Remarquer que $g(\frac{1}{2}) > 0$)

0,25 d - En déduire que $(\forall x>0) : x^2 - \ln x > 0$

(B) Soit f la fonction numérique définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 - 1 - (\ln x)^2$$

(C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal

0,5 1° - a Montrer que $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ puis interpréter graphiquement.

1 b - Montrer que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.

0,25 c - Que peut-on en déduire pour la courbe (C) ?

1 2° - a - Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que :

$$(\forall x>0) : \quad f'(x) = \frac{2(x^2 - \ln x)}{x}$$

0,5 b - En déduire que f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

0,5 c - Montrer que la tangente à la courbe (C) au point $A(1,0)$ a pour équation : $(T) : y = 2x - 2$

0,5 3° - a - Montrer que $(\forall x>0) : f''(x) = \frac{2(x^2 - 1 + \ln x)}{x^2}$

0,5 b - Montrer que A est le seul point d'inflexion de (C)

0,5 4° - Construire la courbe (C) et la droite (T).