

6pts Exercice N° 1: on considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{7}u_n + 3/n \in \mathbb{N}$

0,5 1°/ Vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} - \frac{7}{2} = \frac{1}{7}(u_n - \frac{7}{2})$

1 2°/a. Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n < \frac{7}{2}$

1 b. Montrer que la suite (u_n) est croissante

0,5 c. Démontrer que la suite (u_n) est convergente

3°/ - on pose $v_n = u_n - \frac{7}{2} \quad / n \in \mathbb{N}$

4,5 a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{7}$; puis exprimer v_n en fonction de n .

4,5 b. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n = \frac{7}{2} - \frac{5}{2} \left(\frac{1}{7}\right)^n$, puis calculer sa limite.

4pts Exercice N° 2: Résoudre dans \mathbb{R} les équations et les inéquations suivantes.

$$\ln(x^2+5) = \ln(x+2) + \ln(2x) \quad (2-x)\ln x > 0 \quad 2 - \ln(x) = 0$$

3pts Exercice N° 3: Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(2x^2+1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} + \ln x$$

7pts Exercice N° 4: (A) Soit g la fonction numérique définie

sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = x - \frac{1}{2} \ln(x)$

- 0,5 $\frac{1^{\circ}}{f}$ - a - Montrez que $(\forall x > 0) : g'(x) = \frac{2x-1}{2x}$
- 0,5 $\frac{b}{f}$ - En déduire que la fonction g est croissante sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$ et décroissante sur $]0, \frac{1}{2}]$
- 0,5 $\frac{c}{f}$ - Montrez que $(\forall x > 0) : g(x) > 0$ (Remarque que $g(\frac{1}{2}) > 0$)
- 0,25 $\frac{d}{f}$ - En déduire que $(\forall x > 0) : x^2 - \ln x > 0$

(B) Soit f la fonction numérique définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 - 1 - (\ln x)^2$$

(C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal

- 0,5 $\frac{1^{\circ}}{f}$ - a - Montrez que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ puis interprétez graphiquement.
- 1 $\frac{b}{f}$ - Montrez que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.
- 0,25 $\frac{c}{f}$ - Que peut-on en déduire pour la courbe (C) ?

- 1 $\frac{2^{\circ}}{f}$ - a - Montrez que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que :
- $(\forall x > 0) : f'(x) = \frac{2(x^2 - \ln x)}{x}$

- 0,5 $\frac{b}{f}$ - En déduire que f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
- 0,5 $\frac{c}{f}$ - Montrez que la tangente à la courbe (C) au point

$A(1,0)$ a pour équation : (T) : $y = 2x - 2$

- 0,5 $\frac{3^{\circ}}{f}$ - a - Montrez que $(\forall x > 0) : f''(x) = \frac{2(x^2 - 1 + \ln x)}{x^2}$
- 0,5 $\frac{b}{f}$ - Montrez que A est le seul point d'inflexion de (C)
- 0,5 $\frac{c}{f}$ - Construire la courbe (C) et la droite (T).