

EXERCICE 1 (13 pts)

1pt 1) a) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation : $5x^2 + 2x - 336 = 0$

1pt b) Déduire dans l'ensemble \mathbb{R} l'ensembles des solutions de l'équation : $5 \times 2^{2x} + 2^{x+1} - 336 = 0$

2pts 2) a) Résoudre l'équation différentielle : $y' = 2y - 4$ (E)

1pt b) Déterminer la solution f de l'équation (E) qui vérifie $f(\ln 2) = 6$

4 pts 3) Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 (2x + 1) dx, \quad J = \int_0^\pi \cos(2x) dx, \quad K = \int_0^1 x e^{x^2} dx, \quad L = \int_{e^2}^{e^4} \frac{dx}{x \ln(x)}$$

0,5 pt 4) a) Soit F la fonction numérique définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$F(x) = \frac{x}{2} (\sin(\ln x) - \cos(\ln x))$$

Montrer que F est une primitive de la fonction $x \mapsto \sin(\ln x)$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$

0,5 pt b) Déduire que : $I = \int_1^{e^2} \sin(\ln x) dx = \frac{1 + e^2}{2}$

2pts 5) a) En utilisant une intégration par partie, montrer que : $I = \int_1^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = 4$

1pt b) Déduire la valeur moyenne de la fonction : $f : x \mapsto \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ sur le segment $[1, e^2]$

EXERCICE 2 (7 pts)

Soit f la fonction numérique définie sur \mathbb{R} par : $f : x \mapsto (x^2 - 2x + 1)e^{2x}$

Et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$ ($\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$)

1pt 1) a) Montrer que : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ et interpréter géométriquement le résultat

1pt b) Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ et interpréter géométriquement

Le résultat

1pt 2) a) Montrer que la fonction f est dérivable sur \mathbb{R} et que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f'(x) = 2x(x-1)e^{2x}$$

0,5 pt b) Donner le tableau de variation de f

1pt 3) Tracer la courbe (C) dans le repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$

0,5 pt 4) a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f''(x) - 4f'(x) + 4f(x) = 2e^{2x}$

1pt b) Dédire que : $\int_0^1 f(x) dx = \frac{e^2 - 5}{4}$

1pt c) Calculer l'aire du domaine du plan limité par la courbe (C) et les droites d'équations :

$$x = 0 \quad \text{et} \quad x = 1 \quad \text{et} \quad y = 1$$