

EXERCICE 1 : (3 pts)

On considère dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ les points $A(3,0,2)$, $B(5,-1,1)$ et $C(0,2,3)$ et la sphère (S) d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z - 25 = 0$

- 0,5 1) Montrer que le centre de la sphère (S) est le point $\Omega(1,0,1)$ et que son rayon est $R = 3\sqrt{3}$
- 0,75 2)a) Montrer que : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ et que : $x + y + z - 5 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)
- 1 b) Vérifier que : $d(\Omega, (ABC)) = \sqrt{3}$ puis montrer que le plan (ABC) coupe la sphère (S) en un cercle (Γ) de rayon $r = 2\sqrt{6}$

3) Soit (Δ) la droite passant par le point Ω est perpendiculaire au plan (ABC)

- 0,25 a) Montrer que : $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ)

0,25 b) Montrer que : $H(2,1,2)$ c'est le point d'intersection de la droite (Δ) et le plan (ABC)

0,25 c) Dédurre le centre du cercle (Γ)

EXERCICE 2 : (3 pts)

0,75 1) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes \mathbb{C} l'équation : $z^2 - 6z + 25 = 0$

2) On considère dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v})

Les points A et B et C d'affixes respectivement $a = 3 - 4i$ et $b = 1 - i$ et $c = -1 + 2i$

0,5 a) Calculer $\frac{a-c}{b-c}$ et déduire que les points A , B et C sont alignés

0,5 b) On considère la translation T de vecteur \vec{u} d'affixe : $-5 + i$

Vérifier que l'affixe du point D image du point C par la translation T est $d = -6 + 3i$

0,75 c) Montrer que : $\frac{d-c}{b-c} = -1 - i$ et que : $-\frac{3\pi}{4}$ c'est l'argument du nombre complexe : $-1 - i$

0,5 d) Déduire une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD})$

EXERCICE 3 (3pts)

Une urne contient huit jetons : un jeton porte le nombre : 1 et cinq jetons portent le nombre : 2

Et deux jetons portent le nombre : 3 (les jetons sont indiscernables au toucher)

On tire au hasard et simultanément trois jetons de l'urne

1 1) Soit A l'événement " obtenir trois jetons portant des nombres distincts deux à deux "

Montrer que : $p(A) = \frac{5}{28}$

1 2) Soit B l'événement " les jetons tirés portent des nombres de somme égale à 8 "

Montrer que : $p(B) = \frac{5}{56}$

1 3) Soit C l'événement " Les jeton tirés portent des nombres de somme égale à 7 "

Montrer que : $p(C) = \frac{3}{8}$

EXERCICE 4 : (3pts)

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n + 2}{u_n + 3}$ pour tout n de \mathbb{N}

0,5 1) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n > 1$

2) On pose pour tout n de \mathbb{N} $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$

0,5 a) Vérifier que : $1 - v_n = \frac{3}{u_n + 2}$ pour tout n de \mathbb{N} et déduire que : $1 - v_n > 0$ pour tout n de \mathbb{N}

0,5 b) Montrer que : $u_n = \frac{2v_n + 1}{1 - v_n}$ pour tout n de \mathbb{N}

1 3)a) Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et déduire v_n en fonction

De n

0,5 b) Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ et déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

EXERCICE 5 : (8pts)**Partie 1 :**

Soit g la fonction numérique de variable x définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = 2\ln(x) + 1 + \frac{3}{x^2}$

0,5 1)a) Montrer que : $g'(x) = \frac{2(x^2 - 3)}{x^3}$ pour tout x de $]0, +\infty[$

0,5 b) Montrer que la fonction g est croissante sur l'intervalle $[\sqrt{3}, +\infty[$ et décroissante sur l'intervalle $]0, \sqrt{3}]$

0,5 2)a) Montrer que : $g(\sqrt{3}) = 2 + \ln(3)$ et vérifier que $g(\sqrt{3}) > 0$

0,25 b) Dédire que : $g(x) > 0$ pour tout x de $]0, +\infty[$

Partie 2 :

On considère la fonction f de variable réel x définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = (x^2 + 3)\ln(x)$

Et soit (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) (unité 3cm)

0,5 1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et interpréter géométriquement le résultat

1 b) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ puis montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ (on peut écrire $\frac{f(x)}{x}$ sous la forme $\left(\frac{x^2 + 3}{x}\right)\ln(x)$) et déduire que (C_f) admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$

A déterminer

1,25 2) Montrer que : $f'(x) = xg(x)$ pour tout x de $]0, +\infty[$ puis déduire que f est strictement Croissante sur $]0, +\infty[$

0,5 3) a) Montrer que : $f''(x) = \frac{2x^2 \ln(x) + 3(x^2 - 1)}{x^2}$ pour tout x de $]0, +\infty[$

0,5 b) Etudier le signe de $3(x^2 - 1)$ et $2x^2 \ln(x)$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$ puis déduire l'étude De la concavité de (C_f)

- 0,25 4) Montrer que : $y = 4x - 4$ est une équation cartésienne de la droite (T) tangente à (C_f) au Point d'abscisse 1
- 1 5) Tracer la droite (T) et la courbe (C_f) dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j})
- 0,5 6) a) Montrer que : $u : x \mapsto \frac{x^3}{3} + 3x$ est une fonction primitive de la fonction $x \mapsto x^2 + 3$ sur \mathbb{R}
- 1 b) En utilisant une intégration par partie montrer que :
- $$\int_1^e (x^2 + 3) \ln(x) dx = \frac{2}{9} (14 + e^3)$$
- 0,25 c) Calculer en cm^2 l'aire du domaine délimité par la courbe (C_f) et l'axe des abscisses et les Deux droites d'équations : $x = 1$ et $x = e$