Devoir Surveillé n°2

Troisième

Calculs numériques

Durée 1 heure - Coeff. 4

Noté sur 20 points

L'usage de la calculatrice est autorisé. La maitrise de la langue et la présentation rapporteront 1 point

Exercice 1. Compléter sur cette feuille — 5 points

A compléter sur cette feuille (1,5 point)

Factoriser les expressions suivantes :

- $2x+8=$ .... | • $2x^2+x=$ .... | • $5x^2-15x=$ ....

A compléter sur cette feuille (3,5 points)

Développer les expressions suivantes :

- $(1-3x)^2=$ ....
  ....
- $(2x+3)(2-5x)=$ ....
  ....
- $-2x(1-x)=$ ....
- $(3+2x)(3-2x)=$ ....
  ....

Exercice 2. Un programme — 5 points

On considère le programme de calcul suivant :

Programme 1

- Choisir un nombre entier positif.
- Ajouter 1.
- Calculer le carré du résultat obtenu.
- Enlever le carré du nombre de départ.
- Écrire le résultat.

1. On applique ce programme de calcul au nombre 3. Montrer qu'on obtient 7.

2. Voici deux affirmations :

Affirmation 1

« Le chiffre des unités du résultat obtenu est 7 ».

Affirmation 2

« Chaque résultat peut s'obtenir en ajoutant le nombre entier de départ et le nombre entier qui le suit ».

2. a. Vérifier que ces deux affirmations sont vraies pour les nombres 8 et 13.

2. b. Pour chacune de ces deux affirmations, expliquer si elle est vraie ou fausse quel que soit le nombre choisi au départ.

Exercice 3. Choisir une forme adaptée de $C(x)$ — 5 points

On considère l'expression :

$$C(x) = (x+1)(2-x) - 2(x+1)(2x+3)$$

1. Montrer à l'aide d'un développement que $C(x) = -5x^2 - 9x - 4$.

2. Montrer à l'aide d'une factorisation que $C(x) = (x+1)(-5x-4)$.

3. Calculer $C(x)$ en remplaçant x par (-1).

Exercice 4. Tableur — 3 points

On donne les expressions suivantes :

$$A(x) = (x-3)(5-2x) \text{ et } B(x) = -2x^2 + 11x - 15$$

1. Remplacer x par (-1) et montrer qu'alors $A(-1) = B(-1) = -28$.

2. Jim utilise un tableur pour calculer les valeurs de ces deux expressions avec plusieurs nombres. Il a fait apparaître les résultats obtenus à chaque étape. Il obtient la feuille de calcul ci-dessous :

A2 | fx | -5

	A	B	C
1	x	A(x)	B(x)
2	-5	-120	-120
3	-4.5	-105	-105
4	-4	-91	-91
5	-3.5	-78	-78
6	-3	-66	-66
7	-2.5	-55	-55
8	-2	-45	-45
9	-1.5	-36	-36
10	-1	-28	-28
11	-0.5	-21	-21
12	0	-15	-15
13	0.5	-10	-10
14	1	-6	-6
15	1.5	-3	-3
16	2	-1	-1
17	2.5	0	0
18	3	0	0
19	3.5	-1	-1
20	4	-3	-3
21	4.5	-6	-6
22	5	-10	-10

La colonne B est obtenue à partir d'une formule écrite en B2, puis recopiée vers le bas. Quelle formule Jim a-t-il saisie dans la cellule B2 ?

3. Formuler une conjecture ... et démontrez-la.

Exercice 5. Pairs et impairs — 1 point

Que pensez-vous de l'affirmation suivante ?

Affirmation 3

« La somme d'un nombre pair et d'un nombre impair est un nombre pair ».

Fin du devoir

Bonus

Factoriser l'expression :

$$G(x) = 2x - 4 - 3(7-3x)(x-2)$$

Devoir Surveillé n°2
Correction

Troisième
Calculs numériques
Durée 1 heure - Coeff. 4
Noté sur 20 points

L'usage de la calculatrice est autorisé. La maitrise de la langue et la présentation rapporteront 1 point

Exercice 1. Compléter sur cette feuille — 5 points

A compléter sur cette feuille (1,5 point)

Factoriser les expressions suivantes :

- $2x+8=\underline{2(x+4)}$
- $2x^2+x=\underline{x(2x+1)}$
- $5x^2-15x=\underline{5x(x-3)}$

A compléter sur cette feuille (3,5 points)

Développer les expressions suivantes :

- $(1-3x)^2=\underline{9x^2-6x+1}$
- $(2x+3)(2-5x)=\underline{-10x^2-11x+6}$
- $-2x(1-x)=\underline{-2x++2x^2}$
- $(3+2x)(3-2x)=\underline{-4x^2+9}$

Exercice 2. Un programme — 5 points

Programme 1

- Choisir un nombre entier positif.
- Ajouter 1.
- Calculer le carré du résultat obtenu.
- Enlever le carré du nombre de départ.
- Écrire le résultat.

1. On applique ce programme de calcul au nombre 3. Montrer que le résultat obtenu est 7.

Étape 1	Choisir un nombre entier positif	3
Étape 2	Ajouter 1	$3+1=4$
Étape 3	Calculer le carré du résultat	$4^2=16$
Étape 4	Enlever le carré du nombre de départ	$16-3^2=16-9=\underline{7}$

Le résultat obtenu avec 3 au départ est bien 7.

2. Voici deux affirmations :

Affirmation 1

Le chiffre des unités du résultat obtenu est 7.

Affirmation 2

Chaque résultat peut s'obtenir en ajoutant le nombre entier de départ et le nombre entier qui suit.

2. a. Vérifier que ces deux affirmations sont vraies pour les nombres 8 et 13.

Étape 1	Choisir un nombre entier positif	8	13
Étape 2	Ajouter 1	$8+1=9$	$13+1=14$
Étape 3	Calculer le carré du résultat	$9^2=81$	$14^2=196$
Étape 4	Enlever le carré du nombre de départ	$81-8^2=\underline{17}$	$196-13^2=\underline{27}$

- Donc avec 8 on obtient 17,
17 est un nombre dont le chiffre des unité est 7 donc l'affirmation 1 est vraie.
En outre on a :
$$17=8+9$$
Le résultat peut s'obtenir en ajoutant le nombre entier de départ et le nombre entier qui suit. L'affirmation 2 est vraie.

- Donc avec 13 on obtient 27,
27 est un nombre dont le chiffre des unité est 7 donc l'affirmation 1 est vraie.
En outre on a :
$$27=13+14$$
Le résultat peut s'obtenir en ajoutant le nombre entier de départ et le nombre entier qui suit. L'affirmation 2 est vraie.

2. b. Pour chacune des affirmation, expliquez si elle est vraie ou fausse quelque soit le nombre choisi au départ.

- **Pour l'affirmation 1.**

Étape 1	Choisir un nombre entier positif	1
Étape 2	Ajouter 1	$1+1=2$
Étape 3	Calculer le carré du résultat	$2^2=4$
Étape 4	Enlever le carré du nombre de départ	$4-1^2=3$

En prenant 1 au départ on obtient 3 dont le chiffre des unités n'est pas 7, *l'affirmation 1 n'est donc pas toujours vraie.*

- **Pour l'affirmation 2.**
On va partir d'un nombre quelconque, entier positif que l'on peut noter n.

Étape 1	Choisir un nombre entier positif	n
Étape 2	Ajouter 1	$n+1$
Étape 3	Calculer le carré du résultat	$(n+1)^2$
Étape 4	Enlever le carré du nombre de départ	$(n+1)^2-n^2$

On obtient donc la différence de deux carrés $(n+1)^2-n^2$, terme que l'on peut développer :
$$(n+1)^2-n^2=n^2+2n+1-n^2=2n+1$$
Or $2n+1$ pour s'écrire sous la forme d'une somme de l'entier n et de son suivant $n+1$:
$$2n+1=n+(n+1)$$
L'affirmation 2 est donc toujours vraie.

Exercice 3. Choisir une forme adaptée de $C(x)$ 5 points

On considère l'expression : $C(x) = (x+1)(2-x) - 2(x+1)(2x+3)$.

1. **Montrer à l'aide d'un développement que $C(x) = -5x^2 - 9x - 4$.**

$$\begin{aligned} C(x) &= (x+1)(2-x) - 2(x+1)(2x+3) \\ &= 2x - x^2 + 2 - x - 2\left(2x^2 + 3x + 2x + 3\right) \\ &= -x^2 + x + 2 - 4x^2 - 6x - 4x - 6 \\ C(x) &= \underline{-5x^2 - 9x - 4} \end{aligned}$$

2. **Montrer à l'aide d'une factorisation que $C(x) = (x+1)(-5x-4)$.**

$$\begin{aligned} C(x) &= (x+1)\times(2-x) - 2\times(x+1)\times(2x+3) \\ &= (x+1)\Big[(2-x) - 2(2x+3)\Big] \\ &= (x+1)\Big[2 - x - 4x - 6\Big] \\ C(x) &= \underline{(x+1)(-5x-4)} \end{aligned}$$

3. **Calculer $C(x)$ en remplaçant x par (-1).**
En utilisant la forme développée on obtient facilement :

$$C(-1) = \underbrace{(-1+1)}_{0}\Big(-5\times(-1) - 4\Big)$$

$$\boxed{C(-1) = 0}$$

Exercice 4. Tableur 3 points

On donne les expressions suivantes : $A(x) = (x-3)(5-2x)$ et $B(x) = -2x^2 + 11x - 15$.

1. **Remplacer x par (-1) et montrer qu'alors $A(-1) = B(-1) = -28$.** On obtient facilement :

$$\boxed{A(-1) = B(-1) = -28}$$

2. *Jim utilise un tableur pour calculer les valeurs de ces deux expressions avec plusieurs nombres. Il a fait apparaître les résultats obtenus à chaque étape. Il obtient la feuille de calcul ci-dessous :*

A2 fx -5

	A	B	C
1	x	A(x)	B(x)
2	-5	-120	-120
3	-4.5	-105	-105
4	-4	-91	-91
5	-3.5	-78	-78
6	-3	-66	-66
7	-2.5	-55	-55
8	-2	-45	-45
9	-1.5	-36	-36
10	-1	-28	-28
11	-0.5	-21	-21
12	0	-15	-15
13	0.5	-10	-10
14	1	-6	-6
15	1.5	-3	-3
16	2	-1	-1
17	2.5	0	0
18	3	0	0
19	3.5	-1	-1
20	4	-3	-3
21	4.5	-6	-6
22	5	-10	-10

La colonne B est obtenue à partir d'une formule écrite en B2, puis recopiée vers le bas. Quelle formule Jim a-t-il saisie dans la cellule B2 ?
Jim a saisie dans la cellule B2 la formule :

$$\boxed{= (A2-3)*(5-2*A2)}$$

3. Formuler une conjecture ... et démontrez-la.
Il semble que les deux expressions donnent les mêmes valeurs. Pour prouver cette conjecture, on va développer $A(x)$:

D'une part :

$$A(x) = 5x - 2x^2 - 15 + 6x = \underline{-2x^2 + 11x - 15}$$

D'autre part part :

$$B(x) = \underline{-2x^2 + 11x - 15}$$

Les deux expressions sont bien égales, pour toutes les valeurs de x on a :

$$\boxed{A(x) = B(x)}$$

Exercice 5. Pairs et impairs — 1 point

Que pensez-vous de l'affirmation suivante ?

Affirmation 3

« La somme d'un nombre pair et d'un nombre impair est un nombre pair ».

- Méthode 1 : avec un contre-exemple.

  Il suffit d'exhiber un contre-exemple qui invalide cette propriété. Par exemple la somme de l'entier pair 2 et de l'entier impair 3 vaut 5 qui est un entier impair.
  L'affirmation 3 est donc fausse.

- Méthode 2 : démonstration.

  Si les entiers N et M représentent des entiers naturels, un nombre pair s'écrit sous la forme $2N$ et un nombre impair sous la forme $2M+1$. La somme d'un nombre pair et d'un nombre impair s'écrit donc :

  $$2N + 2M + 1 = 2\underbrace{(N+M)}_{\in\mathbb{N}} + 1$$

  La somme d'un nombre pair et d'un nombre impair est donc toujours un nombre impair.

Fin du devoir

Bonus
Factoriser l'expression :

$$\begin{aligned} G(x) &= 2x - 4 - 3(7-3x)(x-2) \\ &= 2\times(x-2) - 3\times(7-3x)\times(x-2) \\ &= (x-2)\times\left[2 - 3\times(7-3x)\right] \\ &= (x-2)\times\left[2 - 21 + 9x\right] \\ G(x) &= \underline{(x-2)(9x-19)} \end{aligned}$$