

Suites numériques

EXERCICE (1)

On pose $(\forall n \geq 1) \quad U_n = \frac{1}{2\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{k}}$

- 1) montrer que $(\forall k \geq 1) \quad \frac{1}{2\sqrt{k+1}} \leq \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leq \frac{1}{2\sqrt{k}}$
- 2) a) déduire un encadrement du terme U_n de la suite $(U_n)_{n \geq 1}$
 b) déterminer la limite de $(U_n)_{n \geq 1}$

EXERCICE (2)

On pose $u_n = \sqrt[n]{n} - 1$ pour tout entier n tel que $n \geq 2$

- 1) montrer que $(\forall n \geq 2) \quad u_n \geq 0$
- 2) montrer que $(\forall n \geq 2) \quad n \geq C_n^2 (u_n)^2$ en déduire $(\forall n \geq 2) \quad u_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}$
- 3) montrer que $(u_n)_n$ est convergente et déterminer sa limite

EXERCICE (3)

Soit n un entier de \mathbb{N}^* . on considère la fonction f_n définie sur $]0,1[$

$$\text{par : } f_n(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \frac{\pi}{2nx}$$

- 1) montrer que $f_n(x) = 0$ admet une unique solution notée α_n
- 2) montrer que $(\alpha_n)_n$ est décroissante et qu'elle est convergente
- 3) montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0$
- 4) déterminer la limite de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n \sqrt{n}$

EXERCICE (4)

Dans chacun des deux cas montrer que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes

- 1) $u_n = \left(\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n+1} \quad ; \quad v_n = \left(\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n}$
- 2) $u_n = \prod_{k=1}^{k=n} \cos\left(\frac{\pi}{2^k}\right) \quad ; \quad v_n = u_n \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$

EXERCICE (5)

On pose $S_n = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{\sqrt{p}}$ et soit la suite $(U_n)_n$ définie par : $U_n = \frac{S_n}{\sqrt{n}}$

- 1) montrer que $(\forall p \in \mathbb{N}^*) \quad 2\left(\sqrt{p+1} - \sqrt{p}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{p}}$
- 2) déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad S_n \geq 2\sqrt{n+1} - 2$ et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$
- 3) montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad S_n \leq \sqrt{n} + \sqrt{n-1}$
 Puis déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

EXERCICE (6)

Déterminer dans chacun des cas suivants la limite de la suite $(U_n)_n$

- 1) $U_n = 5 \times 3^{n+1} - 2 \times 5^n \quad ; \quad 2) \quad U_n = 2^n \sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$
- 3) $U_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{k=n} k \quad U_n = \sum_{k=2}^{k=n} \frac{2}{k^2 - 1} \quad 4) \quad U_{n+1} \geq 2U_n \text{ et } U_0 \in \mathbb{R}^{*+}$
- 5) $U_n = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{4p^2 - 1} \quad 6) \quad U_n = \sin^2\left(\pi\sqrt{n^2 + n}\right)$
- 7) $U_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} E(kx) \text{ et } x \in \mathbb{R}^* \quad 8) \quad U_n = \frac{2^n}{n^3} \quad 9) \quad U_n = \frac{\sqrt{n}}{2^n}$
- 10) $U_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(-1)^{k+1}}{3^k} \quad 11) \quad U_n = \sum_{k=1}^{k=n^2} \frac{1}{1 + \sqrt{kn}}$
- 12) $U_n = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{\sqrt{p+1} + \sqrt{p}}$