Exercices sur les suites implicites

Exercice 1

On considère la fonction f *définie sur* $\mathbb{R}^+$ *par* $f(x)=x^3+2x-1$

1) a) montrer que f *est bijective de* $\mathbb{R}^+$ *vers un intervalle* J *que l'on déterminera*

b) déduire que l'équation $f(x)=0$ *admet une unique solution* α *et* $\alpha<1$

2) Soit n *un entier naturel non nul.*

a) montrer que l'équation $f(x)=\frac{1}{n}$ *admet une et une seule solution* V_n

b) montrer que $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ \alpha\leq V_n\leq 1$

c) étudier la monotonie de $(V_n)_n$

Exercice 2

Soit n *un entier naturel non nul.*

On considère la fonction f_n *définie sur* $\mathbb{R}^+$ *par* $f_n(x)=x^3+x^2+nx-2$

1) Montrer que l'équation $f_n(x)=0$ *admet une unique solution* x_n *et que* $0<x_n<1$

2) *Vérifier que* $f_{n+1}(x_n)=x_n$ *puis déduire que* $(x_n)_n$ *est décroissante*

Exercice 3

Soit n *un entier naturel non nul.*

On considère la fonction F_n *définie sur* $\mathbb{R}^+$ *par* $F_n(x)=2x^3-x^2+2(n+1)x-1$

1) Montrer que $\left(\exists! a_n\in\left]0,1\right[\right)\ F_n(a_n)=0$

2) Etudier le signe de $F_{n+1}(x)-F_n(x)$

3) étudier la monotonie de $(a_n)_n$

4) montrer que $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ a_n\leq\frac{1}{n+1}$

Exercice 4

Soient n *un entier de* $\mathbb{N}^*$ *et* f_n *la fonction définie sur* $\mathbb{R}^+$ *par :*

$$f_n(x)=\arctan\left(\frac{x}{n}\right)+2x-1$$

1) étudier le sens de variation de la fonction f_n

2) Montrer que l'équation $f_n(x)=0$ *admet une unique solution* b_n *et* $b_n<\frac{1}{2}$

3) Etudier le signe de $f_{n+1}(x)-f_n(x)$ *puis déduire la monotonie de* $(b_n)_n$