Suite numériques

Exercice 1

Soit a un réel de $]0,1[$ on considère la suite $(U_n)_{n\geq 1}$ définie par : $U_n = \prod_{k=0}^{k=n}\left(1+a^{2^k}\right)$

1) montrer que $(U_n)_{n\geq 1}$ est croissante

2) montrer que $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)\ U_n = \dfrac{1-a^{2^{n+1}}}{1-a^2}$

3) en déduire que $(U_n)_{n\geq 1}$ est convergente

Exercice 2

Soit $(U_n)_n$ la suite définie par :

$$U_0 = \frac{1}{2} \text{ و } U_{n+1} = \frac{2U_n}{1+U_n^2}$$

1) a) montrer que $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right)\quad \dfrac{1}{2}\leq U_n \leq 1$

b) montrer que $(U_n)_n$ est convergente

a) Montrer que :

$$\left(\forall n\in\mathbb{N}\right)\quad 0\leq 1-U_{n+1}\leq \frac{2}{5}\left(1-U_n\right)$$

b) montrer que :

$$\left(\forall n\in\mathbb{N}\right)\quad 0\leq 1-U_n\leq \frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{5}\right)^n$$

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

2) on pose $V_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} U_k$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$

Montrer que $n-\dfrac{1}{3}\left(1-\left(\dfrac{2}{5}\right)^n\right)\leq \sum_{k=1}^{k=n} U_k \leq n$

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

Exercice 3

$(\mathcal{U}_n)_n$ une suite telle que :

$$\mathcal{U}_0 = \sqrt[3]{\frac{2}{7}} \text{ et } \mathcal{U}_{n+1} = \sqrt[3]{\frac{1+\mathcal{U}_n^3}{8}}$$

1) a) montrer que $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right)\ \mathcal{U}_n > \sqrt[3]{\dfrac{1}{7}}$

b) montrer que $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right)\ \dfrac{\mathcal{U}_{n+1}}{\mathcal{U}_n} < 1$ puis

déduire la monotonie de $(\mathcal{U}_n)_n$

2) on pose $\mathcal{V}_n = \dfrac{7}{8}\mathcal{U}_n^3 - \dfrac{1}{8}$

a) montrer que $(\mathcal{V}_n)_n$ est géométrique

b) calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{U}_n$

Exercice 4

Soit n un entier tel que $n\geq 2$ on considère la fonction f_n définie par : $f_n(x) = x-\cos\left(\dfrac{x}{n}\right)$

1) montrer que f_n est bijective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

2) en déduire que $f_n(x)=0$ admet une seule solution a_n et que $0<a_n<1$

3) montrer que

$\left(\forall x\in[0,1]\right)\quad f_{n+1}(x)\leq f_n(x)$

Puis étudier la monotonie de $(a_n)_n$

4) déduire que $(a_n)_n$ est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$

Exercice 5

Soit b un réel de $\mathbb{R}^{*+}$, a tel que $a>\sqrt[3]{b}$.

On considère la suite $(\mathcal{U}_n)_n$ telle que :

$$\mathcal{U}_0 = a \text{ و } \mathcal{U}_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2\mathcal{U}_n + \frac{\sqrt[3]{b^2}}{\mathcal{U}_n}\right)$$

1) a) montrer que $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right)\quad \mathcal{U}_n > 0$

b) montrer que

$$\mathcal{U}_{n+1}-\sqrt[3]{b} = \frac{2\mathcal{U}_n-\sqrt[3]{b}}{3\mathcal{U}_n}\left(\mathcal{U}_n-\sqrt[3]{b}\right)$$

c) en déduire que $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right)\quad \mathcal{U}_n > \sqrt[3]{b}$

puis $(\mathcal{U}_n)_n$ est convergente

2) a) montrer que :

$$\left(\forall n\in\mathbb{N}\right)\quad \mathcal{U}_{n+1}-\sqrt[3]{b}\leq \frac{2}{3}\left(\mathcal{U}_n-\sqrt[3]{b}\right)$$

b) déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{U}_n$

Exercice 6

1) a) montrer que $\left(\exists!\alpha\in\left]\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right[\right)\quad \tan\alpha = \dfrac{1}{\alpha}$

b) montrer que $\alpha = \pi + \arctan\dfrac{1}{\alpha}$

2) a) montrer que :

$$\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)\left(\exists!\beta_n\in\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[\right)\quad \tan\beta_n = n+\frac{1}{\beta_n}$$

b) montrer que $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)\quad \alpha<\beta_n$

c) étudier la monotonie de $(\beta_n)_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\beta_n$

Exercice 10

f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=1+\frac{1}{\sqrt{x}}$

1) Montrer que $f(x)=x$ a une seule solution α et $1<\alpha<2$
2) Montrer que $(\forall x\in[1,2])\quad |f'(x)|\leq\frac{1}{2}$
3) Soit la suite $(U_n)_n$ définie par :
   $U_0=2$ و $U_{n+1}=f(U_n)$

a) Montrer que $(\forall n\in\mathbb{N})\quad 1\leq U_n\leq 2$

b) Montrer que $(\forall n\in\mathbb{N})\quad |U_n-\alpha|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n$

c) Déduire que $(U_n)_n$ est convergente et calculer sa limite

4) On pose $T_n=(-1)^n(U_n-\alpha)$ و $S_n=\sum_{k=0}^{k=n}T_k$

a) Montrer que $(\forall n\in\mathbb{N})\quad U_{2n+1}\leq\alpha\leq U_{2n}$

en déduire que $(\forall n\in\mathbb{N})\quad T_n\geq 0$

b) Etudier la monotonie de $(S_n)_n$ et montrer qu'elle est majorée

Exercice 11

On considère la suite $(U_n)_n$ définie par : $U_1=1$ و

$$U_{n+1}=\sqrt{U_n^2+\frac{1}{(n+1)^2}}$$

1) montrer que $(\forall n\in\mathbb{N})\quad U_n>0$

En déduire que $(U_n)_n$ est croissante

2) on pose $V_n=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k^2}$

a) montrer que $(\forall n\in\mathbb{N})\quad V_n\leq 2-\frac{1}{n}$

b) montrer que $(\forall n\in\mathbb{N})\quad U_n=\sqrt{1+V_n}$

c) déduire $(\forall n\in\mathbb{N})\quad U_n<\sqrt{3}$ puis que $(U_n)_n$ est convergente . on pose $\ell=\lim_{n\to+\infty}U_n$

3) a) montrer que $(\forall k>3)\quad 2^k\geq k^2$

b) montrer que $(\forall k>2)\quad U_{k+1}^2-U_k^2\geq\frac{1}{2^{k+1}}$

en déduire que $\sqrt{\frac{179}{72}}\leq\ell\leq\sqrt{3}$

Exercice 7

Soit n un entier de $\mathbb{N}$ on considère f définie sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x)=\tan x-x$

1) étudier le sens de variation de f
2) montrer que $f(x)=n$ a une solution α_n
3) a) montrer que $(\alpha_n)_n$ est convergente

b) déterminer la limite de $(\alpha_n)_n$

Exercice 8

f définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ Par : $f(x)=\sqrt{\frac{2}{1+\sin x}}$

1) a) étudier les variations de f

b) déduire que $f(x)=x$ a une unique solution α dans $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

2) montrer que $\left(\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)\quad |f'(x)|\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$

3) $(U_n)_n$ la suite définie par :
   $U_0=0$ و $U_{n+1}=f(U_n)$

a) montrer que $(\forall n\in\mathbb{N})\quad U_n\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

b) montrer que :

$$(\forall n\in\mathbb{N})\quad |U_{n+1}-\alpha|\leq\frac{\sqrt{2}}{2}|U_n-\alpha|$$

c) déduire que $(U_n)_n$ est convergente et calculer $\lim_{n\to+\infty}U_n$

Exercice 9

$(U_n)_n$ و $(V_n)_n$ deux suites telles que :

$$U_n=\sum_{k=0}^{k=n}\frac{1}{3^k}\quad و\quad V_n=\sum_{k=0}^{k=n}\frac{k}{3^k}$$

1) déterminer la limite de $(U_n)_n$
2) a) vérifier que :
   $(\forall n\in\mathbb{N})\quad 3V_{n+1}=U_n+V_n$

b) en déduire que $(\forall n\in\mathbb{N})\quad V_n\leq 3$

c)montrer que $(V_n)_n$ est convergente et déterminer sa limite