

Exercice (1)

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = x(\ln x)^2 - (x-1)^2$; $x \neq 0$ و $f(0) = -1$

- 1) a) montrer que f est continue sur $]0, +\infty[$
 b) étudier la dérivabilité de f à droite de 0
- 2) calculer les limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et donner une interprétation géométrique
- 3) a) montrer que $(\forall x > 0) \ln x \leq x - 1$
 b) calculer $f'(x)$; $f''(x)$ et vérifier que $f'(1) = 0$
 c) déduire le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f
- 4) construire la courbe de la fonction f

Exercice (2)

Partie (1) soit g la fonction définie par : $g(x) = x - (1+x)\ln(1+x)$

- 1) déterminer D_g et calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$; $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} g(x)$
- 2) calculer $g'(x)$ et donner le tableau de variation de g
- 3) déduire le signe de $g(x)$ (remarquer que $g(0) = 0$)

Partie (2)

on considère la fonction f définie sur $]-1, +\infty[$ par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{\ln(1+x)} & x \neq 0 ; x \neq -1 \\ f(0) = 1 & ; f(-1) = 0 \end{cases}$$

- 1) a) montrer f que au point 0 et à droite de -1
 b) étudier la dérivabilité de f à droite de -1
- 2) a) montrer que $(\forall x \geq 0) x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$
 étudier la dérivabilité de f à droite de 0
 b) soit x un réel de $]-1, 0[$ et on considère la fonction φ définie sur $]-1, 0[$ par :

$$\varphi(t) = t^2(x - \ln(1+x)) - x^2(t - \ln(1+t))$$
 . Montrer que :

$$(\exists c \in]x, 0[) \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2(1+c)}$$
 puis étudier la dérivabilité de f à gauche de 0
- 3) montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et étudier la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$
- 4) a) montrer que : $(\forall x \in]-1, +\infty[- \{0\}) ; f'(x) = \frac{-g(x)}{(1+x)(\ln(1+x))^2}$
 b) dresser le tableau de variation de f
- 5) étudier la position de (C_f) par rapport à $(\Delta) y = x$ et construire la courbe (C_f)

Exercice (3)

Soit n un entier de \mathbb{N}^* . On considère la fonction f_n définie par : $f_n(x) = nx + \ln x$

- 1) a) calculer les limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f_n(x)$

دالة لوغاريتم

- b) étudier la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$
- 2) étudier le sens de variation de f_n et construire la courbe (C_1)
- 3) a) montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ a une seule solution u_n et que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad u_n < 1$
 b) montrer que $f_n(u_{n+1}) = -u_{n+1}$, déduire la monotonie de la suite $(u_n)_n$
- 4) a) montrer que $(\forall x > 0) \quad x > \ln x$, déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad u_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$
 b) déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n$ et montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{nu_n}{\ln n} = 1$

Exercice (4)

Partie (1) soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = -\frac{1}{x+1} + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

- 1) calculer les limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$
- 2) montrer que : $g'(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2}$ et donner le tableau de variation de g
- 3) déduire que $(\forall x > 0) \quad g(x) > 0$

Partie (2)

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$; $x \neq 0$ et $f(0) = 0$

- 1) a) montrer que f est continue à droite de 0
 b) montrer que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ donner une interprétation géométrique du résultat

- 2) étudier la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$
- 3) calculer $f'(x)$ et étudier le sens de variation de f puis donner le tableau de variation
- 4) construire la courbe (C_f)

Partie (3) soit $(U_n)_{n>0}$ une suite telle que $U_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ et on pose $V_n = \ln U_n$

- 1) a) vérifier que $V_n = f(n)$ et déduire que $(U_n)_n$ est croissante
 b) montrer que $(\forall x > 0) \quad \ln(1+x) < x$; déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad U_n < e$ puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$
- 2) on pose $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{V_k}{k}$. exprimer S_n en fonction de n et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{\ln n}$

Exercice (5)

Soit f la fonction définie sur $\left]0, \frac{1}{e}\right[\cup \left] \frac{1}{e}, \infty\right[$ par : $f(x) = \frac{x}{1 + \ln x}$; $x \neq 0$ et $f(0) = 0$

(C) la courbe de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

- 1) a) montrer que f est continue à droite de $x_0 = 0$
 b) étudier la dérivabilité de f à droite de $x_0 = 0$

دالة لوغاريتم

- 2) calculer les limites $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}} f(x)$
 $\lim_{x < \frac{1}{e}}$ et $\lim_{x > \frac{1}{e}}$
- 3) a) calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
 b) étudier la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$
- 4) montrer que $f'(x) = \frac{\ln x}{(1 + \ln x)^2}$ puis dresser le tableau de variation de f
- 5) construire la courbe (C)
- 6) soit n un entier tel que $n \geq 2$.
- a) montrer que l'équation $f(x) = \sqrt{n}$ admet deux solutions u_n et v_n avec $e^{-1} < u_n < 1 < v_n$
- b) (b1) montrer que $(\forall n \geq 2) v_n \geq \sqrt{n}$ et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$
 (b2) montrer que $(\forall x \geq 16) \sqrt{x} > 1 + \ln x$ et déduire que $(\forall n \geq 16) v_n \leq n$
 (b3) montrer que $(\forall n \geq 2) \ln v_n = \frac{1}{2} \ln n + \ln(1 + \ln v_n)$ puis déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln v_n}{\ln n} = \frac{1}{2}$
- c) (c1) montrer que $(u_n)_n$ est décroissante puis qu'elle est convergente
 (c2) montrer que $(\forall n \geq 2) u_n = e^{\frac{u_n}{\sqrt{n}} - 1}$; déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^{-1}$
 (c3) démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n}(u_n - e^{-1}) = e^{-2}$

Exercice (7)

Soit n un entier de \mathbb{N}^* . On considère la fonction f_n définie par : $f_n(x) = x - n + \frac{n}{2} \ln x$

- 1) calculer les limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$; $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f_n(x)$
- 2) calculer $f'_n(x)$ et dresser le tableau de variation de f_n
- 3) a) montrer que $f_n(x) = 0$ admet une unique solution u_n et $(\forall n \in \mathbb{N}^*) 1 \leq u_n < e^2$
 b) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) f_n(u_{n+1}) = 1 - \frac{1}{2} \ln u_{n+1}$ et déduire la monotonie de $(u_n)_n$
- c) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \ln u_n = 2 - \frac{2}{n} u_n$
- d) calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} u_n$ puis déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^2$
- 4) a) montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) (\exists d > 0) e^{\frac{2}{n} u_n} - 1 = \frac{2e^d}{n} u_n$
 b) déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) 1 \leq \frac{e^{\frac{2}{n} u_n} - 1}{\frac{2}{n} u_n} \leq e^{\frac{2e^2}{n}}$ puis déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(e^2 - u_n)$