Exercice 1

Calculer les limites suivantes

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x^2+1)}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x}$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} x^3(\ln x)^4$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\sqrt{x}\,\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(2+3\sqrt{x})}{\ln(1+2x^2)}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x\,\ln(x+1)}{x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\dfrac{2x+1}{2x+3}\right)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^3}{x^2}$

Exercice 2

Résoudre les équations et inéquations ci-dessous

1) $2\ln(x-2)-\ln(x+3)=0$, $(\ln x)^2-3\ln x+2=0$, $(\ln x)^3-\ln x=0$

2) $\ln(x^2-x)+\ln\left(\dfrac{1}{3x+4}\right)<0$, $\ln x-2\geq\dfrac{4}{\ln x}$, $\ln x>-1+\ln 2$

Exercice 3

1) montrer que $(\forall x\in\,]0,+\infty[)\ \ln(1+x)\leq x\leq(x+1)\ln(1+x)$

2) a) montrer que : $\prod\limits_{k=1}^{k=n}\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^k\leq e^n\leq\prod\limits_{k=1}^{k=n}\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^{k+1}$

b) en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{n!}$

Exercice 4

1) a) montrer que $(\forall\in\,]0,+\infty[)\quad \ln t\leq t-1$

b) en déduire que $(\forall\in\mathbb{R}^{+*})\quad x\ln x\geq x-1$

2) montrer que $(\forall x\in[1,+\infty[)\ \ x\ln x\leq\dfrac{1}{2}(x^2-1)$

3) soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=x\ln x$

a) étudier le sens de variation de f puis dresser le tableau de variations

b) soit n de $\mathbb{N}^*$ montrer que l'équation $f(x)=\dfrac{1}{n}$ admet une seule solution a_n et $1<a_n<e$

c) étudier la monotonie de $(a_n)_{n\geq 1}$ et déduire qu'elle est convergente

d) montrer que $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}\leq a_n\leq 1+\dfrac{1}{n}$ puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$

Exercice 5

Soit n un entier tel que $n\geq 3$. on considère la fonction f_n définie sur $]0,+\infty[$ par : $f_n(x)=x^2-2n\ln x$

1) a) calculer les limites $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}f_n(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f_n(x)$

b) étudier les variations de f_n et donner le tableau de variations

2) montrer que $f_n(x)=0$ admet deux solutions u_n et v_n telles que $u_n<\sqrt{n}<v_n$

3) calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n$ puis montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln(v_n)}{\ln(2n)}=\dfrac{1}{2}$

4) a) montrer que $(\forall n\geq 3)\quad u_n\geq 1$

b) vérifier que $f_{n+1}(u_n)=-\ln u_n$ en déduire que $(u_n)_n$ est convergente

c) montrer que $(\forall n\geq 3)\ u_n\leq e^{\frac{3}{2n}}$ en déduire la limite de $(u_n)_n$

Exercice 6

1) montrer que $\left(\forall x\in\mathbb{R}^{+*}\right)\quad \ln x\leq x-1$

2) soit n de $\mathbb{N}$ tel que $n\geq 2$. $x_1;x_2;.......;x_n$ و $\alpha_1;\alpha_2;.......;\alpha_n$ des réels de $\mathbb{R}^{*+}$

Tels que $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k=1$ on pose $y=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\,x_k$

a) Montrer que pour tout k de $\{1;2;.....;n\}$ on a : $\alpha_k\ln\left(\frac{x_k}{y}\right)\leq\frac{\alpha_k\,x_k}{y}-\alpha_k$

b) En déduire que : $\sum_{k=1}^{k=n}\alpha_k\ln\left(x_k\right)\leq\ln\left(\sum_{k=1}^{k=n}\alpha_k\,x_k\right)$

c) Montrer que : $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n}\ln\left(x_k\right)\leq\ln\left(\frac{\sum_{k=1}^{k=n}x_k}{n}\right)$

d) Prouver que $\sqrt[x]{x_1\,x_2\,.....x_n}\leq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n}x_k$

e) Montrer que $n!\leq\left(\frac{n+1}{2}\right)^n$

En déduire que $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+......+\frac{x_n}{x_1}\geq n$ pour tous $x_1;x_2;.......;x_n$ de $\mathbb{R}^{*+}$

Exercice 7

1) montrer que $\left(\forall x>0\right)\quad x-\frac{x^2}{2}\leq\ln\left(1+x\right)\leq x$

2) on pose $U_n=\sum_{k=1}^{k=n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$ pour tout entier naturel n non nul

a) calculer U_1 ; U_2

b) montrer que $\left(U_n\right)_n$ est convergente (on donne $\sum_{k=1}^{k=n}k^2=\frac{n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)}{6}$)

3) on pose $V_n=\prod_{k=1}^{k=n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$ pour n de $\mathbb{N}^*$.

montrer que $\left(V_n\right)_n$ est convergente et déterminer sa limite

Exercice 8

Soit x de $]0,+\infty[$ on considère la fonction φ définie par :

$\varphi(t)=x^2(\ln(1+t)-t)-t^2\left(\ln(1+x)-x\right)$

1) montrer que φ vérifier les conditions de rool sur $[0,x]$

2) en déduire qu'il existe un réel c tel que $\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=\frac{-1}{2(1+c)}$

3) déduire que $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=-\frac{1}{2}$

4) déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$