

Fonction logarithme

Exercice 1

Calculer les limites suivantes

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(\frac{x+1}{x+2} \right)$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{x \ln x}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - 2 \ln x}{3 + \ln x}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2x+3)}{\sqrt[3]{x}}$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x+1} \ln \left(\frac{x^3+1}{x^2+2} \right)$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(+2 \tan x)}{x}$	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{\ln x}$	
$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2) \ln x - x \ln(x+2)$		$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} (x^2 - 1) \ln(x^2 + 2x - 3)$	

Exercice 2

Partie (1) Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = x - 2(x+1) \ln(x+1)$

- 1) montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$
- 2) a) calculer $g'(x)$ et montrer que g est décroissante
b) en déduire que $(\forall x \in]0, +\infty[) \quad g(x) < 0$

Partie (2) On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{x}$

- 1) montrer que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0^+ \\ x > 0}} f(x) = +\infty$ poser $t = \sqrt{x}$
- 2) montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ interpréter graphiquement le résultat
- 3) a) montrer que $f'(x) = \frac{g(\sqrt{x})}{2x^2(1+\sqrt{x})}$
b) dresser le tableau de variations de f
- 4) tracer la courbe (C_f) manti.1s.fr

Exercice 3

Partie (1) On pose $g(x) = x - 4 + 4 \ln x$

- 1) calculer les limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x)$
- 2) calculer $g'(x)$ puis donner le tableau de variation de
- 3) a) montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $]1, 2[$ une seule solution α
b) en déduire que : $g(x) > 0$ sur $]\alpha, +\infty[$ et $g(x) < 0$ sur $]0, +\infty[$

Partie (2)

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = \left(1 - \frac{4}{x}\right) \ln x$

fonction logarithme

1) montrer que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$ interpréter géométriquement le résultat

2) montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ donner une interprétation graphique

3) a) montrer que $(\forall x > 0) \quad f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

b) vérifier que $f(\alpha) = -\frac{4}{\alpha}(\ln \alpha)^2$ puis dresser le tableau de variation de f

4) tracer (C_f) on donne $\alpha \approx 1,75$; $f(\alpha) \approx -0,72$ et $f(1) = f(4) = 0$

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$ par : $f(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$; $x \neq 0$ et $f(0) = 0$

Partie (1)

1) a) montrer que f est continue à droite de $x_0 = 0$

b) étudier la dérivabilité de f à droite de $x_0 = 0$

2) calculer les limites de la fonction f

3) calculer $f'(x)$ et étudier le sens de variation de f

puis donner le tableau de variation

4) tracer la courbe (ζ_f)

Partie (2)

On considère la fonction g telle que : $g(x) = f(-1-x)$

1) déterminer le domaine de définition de g

2) montrer que les courbes de g et f sont symétriques par rapport à $(\Delta) \quad x = -\frac{1}{2}$

3) a) montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad f(n) < 1 < g(n)$

b) en déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$

Exercice 5

On pose $U_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}$ pour tout n de \mathbb{N}^*

1) en utilisant le théorème des accroissements finis montrer que :

$$(\forall k \in \mathbb{N}^*) \quad \frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$$

2) a) montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad U_{n+1} - 1 \leq \ln(n+1) \leq U_n$

b) en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} U_n$

fonction logarithme

3) on considère la suite $(V_n)_n$ définie par : $V_n = U_{n+1} - \ln n$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$)

On pose $f(x) = \frac{1}{x} - \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$ et $g(x) = \frac{1}{x+1} - \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$ pour tout x de $]0, +\infty[$

a) Dresser le tableau de g et f

b) En déduire que ($\forall n \in \mathbb{N}^*$) $0 < f(n) < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

c) Vérifier que $V_n = \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$ en déduire que $(V_n)_n$ est décroissante

d) Montrer que ($\forall n > 1$) $f(1) < V_n < 1 - \frac{1}{n}$ déduire que $(V_n)_n$ est convergente puis encadrer sa limite a

Exercice 6

Soit n de \mathbb{N}^* . on considère la fonction f_n telle que $f_n(x) = (x-n)\ln(x) - x\ln(x-n)$

1) a) résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $(x+1)^2 < 2x^2$

b) montrer que ($\forall p \in \mathbb{N}$) $p \geq 5 \Rightarrow p^2 < 2^p$

c) étudier le signe de $f_n(n+1)$ et $f_n(n+2)$

2) calculer $f'_n(x)$ et $f''_n(x)$ puis dresser le tableau de f_n

3) a) calculer la limite $\lim_{\substack{x \rightarrow n \\ x > n}} f_n(x)$

b) montrer que ($\forall x > n$) $f_n(x) = -n \ln(x) - x \ln\left(1 - \frac{n}{x}\right)$

c) calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$

4) tracer la courbe de la fonction f_3

5) a) montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une seule solution α_n

b) montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha_n - n) = 1$ puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha_{n+1} - \alpha_n)$

Exercice 7

Partie (1) Soit la fonction g définie par : $g(x) = x + 1 + \ln x$

1) calculer $g'(x)$ et montrer que g est croissante sur $]0, +\infty[$

2) montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution α puis que $\alpha < \frac{1}{e}$

3) déduire le signe de $g(x)$ sur $]0, +\infty[$

Partie (2) On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x \ln x}{x+1} ; x \neq 0 \text{ et } f(0) = 0$$

fonction logarithme

- 1) a) montrer que f est continue à droite de 0
b) étudier la dérivabilité de f à droite de 0
- 2) a) calculer la limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
b) étudier la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$
- 3) a) montrer que : $(\forall x > 0) f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$
b) vérifier que $f(\alpha) = -\alpha$ et dresser le tableau de variation de f
- 4) tracer la courbe (C_f) (on donne $\alpha \approx 0,28$)

Partie (3) soit n un entier naturel

- 1) montrer que l'équation $f(x) = n$ admet dans $]0, +\infty[$ une unique solution x_n
- 2) montrer que $f(e^n) < n$ en déduire que $x_n > e^n$ et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$
- 3) montrer que $\ln\left(\frac{x_n}{e^n}\right) = \frac{n}{x_n}$ puis déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{e^n}$

Exercice 8

Partie (1) On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{1}{x} + \ln\left(\frac{1}{x+1}\right)$

- 1) déterminer le domaine de f et calculer les limites de f
- 2) calculer la dérivée $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f
- 3) soit m un paramètre de \mathbb{R}^{+*} .
 - a) montrer que $\frac{1}{m+1} \leq \ln\left(\frac{m+1}{m}\right) \leq \frac{1}{m}$
 - b) déduire que $(\forall m \in \mathbb{R}^{+*}) 0 < f(m) < \frac{1}{m(m+1)}$

Partie (2)

On pose $U_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+n}$ et $T_n = f(n) + f(n+1) + \dots + f(n+n) / \forall n \in \mathbb{N}^*$

- a) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) 0 < T_n \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{2n+1}$ calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n$
- b) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) T_n = U_n - \ln\left(\frac{2n+1}{n}\right)$ en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$
- c) on pose $V_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{(-1)^{2n}}{2n}$
montrer que $U_n - \frac{1}{n} \leq V_n \leq U_n + \frac{1}{n}$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$) puis déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$