

**Exercice 1 :**

Calculer les limites suivantes :

$$\begin{aligned}
& \textcircled{1} - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 9x + 8} \quad ; ; \quad \textcircled{2} - \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - x - 20} \quad ; ; \quad \textcircled{3} - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 - 3x - 2}{7x^2 - 3x - 4} \quad ; ; \quad \textcircled{4} - \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 7x + 3}{3x^2 - 8x - 3} \\
& \textcircled{5} - \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 2x^2 - 9}{x^4 - 8x^2 - 9} \quad ; ; \quad \textcircled{6} - \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x^2 - 9} - 4}{x - 5} \quad ; ; \quad \textcircled{7} - \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{3x + 4} - \sqrt{5x - 4}}{\sqrt{x + 5} - 3} \\
& \textcircled{8} - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 + 3} - \sqrt{x^4 + x^2 + 2}} \quad ; ; \quad \textcircled{9} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^2 + 2}{2x^2 - 9x} \quad ; ; \quad \textcircled{10} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 2x^4}{x^3 - x^2 + 1} \\
& \textcircled{11} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - x} - 2x \quad ; ; \quad \textcircled{12} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} - x \quad ; ; \quad \textcircled{13} - \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4x^2 + 3x - 1} + 2x - 1 \\
& \textcircled{14} - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 3}}{x} \quad ; ; \quad \textcircled{15} - \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 2x + 3} + \sqrt{x^2 + 3x - 2} + 2x
\end{aligned}$$

**Exercice 2 :**

Calculer les limites suivantes :

$$\begin{aligned}
& \textcircled{1} - \lim_{x \rightarrow 6} \frac{2x + 3}{x - 6} \quad ; ; \quad \textcircled{2} - \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x - 9}{x^2 - 2x - 3} \quad ; ; \quad \textcircled{3} - \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 1}{x^2 - 4x + 4} \quad ; ; \quad \textcircled{4} - \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + |x - 2| - 4}{x - 2} \\
& \textcircled{5} - \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x - 3}{x^2 - 4x + 3} \quad ; ; \quad \textcircled{6} - \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}{x - 1} \quad ; ; \quad \textcircled{7} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \tan x} \quad ; ; \quad \textcircled{8} - \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{4x - \pi} \\
& \textcircled{9} - \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3} \sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{6}} \quad ; ; \quad \textcircled{10} - \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3} \cos x - \sin x}{x - \frac{\pi}{3}} \quad ; ; \quad \textcircled{11} - \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x}{x - \pi} \quad ; ; \quad \textcircled{12} - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \sqrt{\cos 2x}}{x^2}
\end{aligned}$$

**Exercice 3 :**Etudier la continuité de la fonction  $f$  aux points  $x_0$  dans chacun des cas suivants :

$$\begin{aligned}
& \textcircled{1} - \begin{cases} f(x) = \frac{x^3 - x^2 - x - 15}{x - 3} ; x \neq 3 \\ f(3) = 7 \end{cases} \text{ et } x_0 = 3 \quad ; ; \quad \textcircled{2} - \begin{cases} f(x) = -2x^2 + 3 ; x \leq 2 \\ f(x) = x^3 + 2x - 1 ; x > 2 \end{cases} \text{ et } x_0 = 2 \\
& \textcircled{3} - \begin{cases} f(x) = \frac{2x^2 - x + 1}{x - 1} ; x \leq 3 \\ f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 1}{x^2 - 3x} ; x > 3 \end{cases} \text{ et } x_0 = 3
\end{aligned}$$

**Exercice 4 :**

①- Dans chacun des cas suivants, montrer que l'équation proposée admet au moins une solution dans l'intervalle  $I$ .

$$a - x^3 - 2x^2 - 1 = 0 \text{ et } I = [2, 3] \quad ; ; \quad b - x^4 - 2x - \sqrt{x} + 2 = 1 \text{ et } I = ]0, 1[$$

$$c - x^3 - 3x^2 + 15x = 7 \text{ et } I = \mathbb{R} \quad ; ; \quad d - x^{17} = x^{11} + 1 \text{ et } I = [0, +\infty[$$

②- Dans chacun des cas suivants, montrer que l'équation proposée admet une unique solution dans l'intervalle  $I$ .

$$\begin{aligned} a - x^3 - 3x^2 - 5 = 0 \text{ et } I = [2,4] & \quad ;: \quad b - 2x^3 + 3x + 5 = 1 \text{ et } I = ]-1,0[ \\ c - x^3 + x^2 + x + 1 = 0 \text{ et } I = ]-\infty,0] & \quad ;: \quad d - 2x^3 - 5x^2 = 3 \text{ et } I = \mathbb{R} \end{aligned}$$

### Exercice 5 :

On considère la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = x^3 + 2x - 4$ .

- ① - Etudier les variations de la fonction  $f$ .
- ② - Montrer que la courbe représentatif de la fonction  $f$  coupe l'axe des abscisses en un seul point dont l'abscisse  $\alpha$  tel que  $1 < \alpha < 2$ .
- ③ - En utilisant la méthode de dichotomie, donner un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude  $25 \times 10^{-2}$

### Exercice 6 :

On considère la fonction  $f$  définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2 - 2bx + 1}{2x^2 + ax - a - 2} & ; x < 1 \\ \frac{-2x^2 + 3x + 3}{x^2 + 1} & ; x > 1 \\ f(1) = \frac{2+c}{3} \end{cases}$$

Déterminer les réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  pour que la fonction  $f$  soit continue au point  $x_0 = 1$ .

### Exercice 7 :

- ① - Soit  $f$  et  $g$  deux fonction continues sur  $[0;1]$  telles que :  $f(0) = g(1) = 0$  et  $f(1) = g(0) = 1$ . Montrer que :  $(\exists \alpha \in [0;1]) : f(\alpha) = 2017g(\alpha)$ .
- ② - Soit  $f$  une fonction continue sur  $]0;1[$ . Montrer que :  $(\exists \alpha \in ]0;1[) : f(\alpha) = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}$ .
- ③ - Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a;b]$  telles que :  $f(a) < ab$  et  $b^2 < f(b)$ .  
Montrer que :  $(\exists \alpha \in ]a;b[) : f(\alpha) = \alpha b$ .

### Exercice 8 :

Soit  $f$  la fonction définie sur  $I = [1; +\infty[$  par :  $f(x) = (1 + x^3)^2$ .

- ① - Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $I$  sur un intervalle  $J$  à déterminer.
- ② - Calculer  $(\forall x \in J) : f^{-1}(x)$ .

### Exercice 9 :

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3}$ .

- ① - Etudier les variations de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
- ② - Soit  $g$  la restriction de  $f$  à l'intervalle  $[0; +\infty[$ .
  - a - Montrer que la fonction  $g$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  à déterminer
  - b - Calculer  $(\forall x \in J) : g^{-1}(x)$ .