

○ **Exercice 01:**

⇒ Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^+ par :

$$f(2) = \frac{-1}{2} \text{ et } f(x) = \frac{x^2 - 2x}{|x^2 - 5| - 1}; \text{ si } x \neq 2 .$$

- 1) Déterminer D_f , puis calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- 2) Montrer que f est continue en $x_0 = 2$.

○ **Exercice 02:**

⇒ On considère la fonction f définie par :

$$f(2) = 4 \text{ et } f(x) = \frac{x^3 - 8}{x^2 - x - 2}, \text{ si } x \neq 2 .$$

- 1) Déterminer D_f .
- 2) Montrer que f est continue en $x_0 = 2$.
- 3) a) Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}), f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{x + 1}$.
- b) Justifier que f est continue sur chacun des intervalles $] -\infty, -1[$ et $] -1, +\infty[$.

○ **Exercice 03:**

⇒ On considère la fonction f définie par :

$$f(-1) = \frac{-1}{2} \text{ et } f(x) = \frac{2}{1-x^2} - \frac{3}{1+x^3}, \text{ si } x \neq -1 .$$

- 1) a) Déterminer D_f .
- b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$.
- 2) a) Vérifier que : $(\forall x \in D_f), f(x) = \frac{2x-1}{(1-x)(1-x+x^2)}$.
- b) En déduire que f est continue en $x_0 = -1$.

○ **Exercice 04:**

⇒ On considère la fonction f définie par :

$$f(1) = a \text{ et } f(x) = \frac{x^2 \sqrt{x+3} - 2}{1-x^2}, \text{ si } x \neq 1 \text{ Où } a \in \mathbb{R} .$$

- 1) Déterminer D_f , puis calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- 2) Pour quelle valeur de a la fonction f est-elle continue en $x_0 = 1$?

○ Exercice 05:

⇒ Soit f la fonction définie par :

$$f(1) = \frac{4}{3} \text{ et } f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + \sqrt{x} - 2}; \text{ si } x \neq 1.$$

1) a) Justifier que $D_f = \mathbb{R}^+$.

b) Montrer que f est continue en $x_0 = 1$.

2) a) Justifier que f est continue sur chacun des intervalles $[0; 1[$ et $]1; +\infty[$.

b) En utilisant ce qui précède, montrer que f est continue sur \mathbb{R}^+ .

○ Exercice 06:

⇒ Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x - \sqrt{x-2}; & x \geq 2 \\ \frac{3}{3-x}; & x < 2 \end{cases}$$

1) a) Justifier que $D_f = \mathbb{R}$.

b) Montrer que f est continue en $x_0 = 2$.

2) a) Justifier que f est continue sur $] -\infty; 2[$ et $[2; +\infty[$.

b) En utilisant ce qui précède, montrer que f est continue sur \mathbb{R} .

○ Exercice 07:

⇒ On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3 + \sin x + \cos x} - 2}{x}; & x > 0 \\ ax + \sqrt{x^2 + x + 1}; & x \leq 0 \end{cases}; \text{ où } a \in \mathbb{R}.$$

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2) Montrer que f est continue à droite en 0.

3) a) Montrer que f est continue sur $] -\infty; 0]$ et $]0; +\infty[$.

b) La fonction f est-elle continue sur \mathbb{R} ? Justifier votre réponse.

○ Exercice 08:

⇒ Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^+ par :

$$f(1) = a \text{ et } f(x) = \frac{x^2 + x - 6\sqrt{x} + 4}{(x-1)^2}; \text{ si } x \neq 1; \text{ où } a \in \mathbb{R}.$$

✓ Déterminer la valeur de a pour laquelle f est continue sur \mathbb{R}^+ .

○ **Exercice 09:**

✓ Montrer que l'équation (E): $\frac{1}{x-1} = \sqrt{x}$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]1; 2[$.

○ **Exercice 10:**

⇒ On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = x^3 - x^2 + 3x + 1 .$$

1)- Montrer que f est strictement croissante sur \mathbb{R} .

2)- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique a dans $\left] \frac{-1}{2}; 0 \right[$.

3)- Calculer $f\left(\frac{-1}{4}\right)$, puis en déduire un encadrement de a d'amplitude $0,25$.

4)- Montrer que $\sqrt{a+1} = \frac{-2a}{a+1}$, puis en déduire que $a < \frac{-1}{4\sqrt{2}}$.

○ **Exercice 11:**

⇒ On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$.

1)- Déterminer D_f , puis calculer les limites de f aux bornes de D_f .

2)- a)- Montrer que : $(\forall x \in D_f), f'(x) = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$.

b)- Dresser le tableau de variation de f (en justifiant votre réponse) .

3)- Déterminer $f\left(]-\infty, -2]\right)$, $f\left([-2; -1[\right)$, $f\left(]-1; 0\right]$) et $f\left([0; +\infty[\right)$.

4)- On désigne par g la restriction de f à l'intervalle $I =]-\infty; -2]$.

a)- Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera .

b)- Montrer que : $(\forall x \in J), g^{-1}(x) = \frac{x - \sqrt{x^2 + 4x}}{2}$.

○ **Exercice 12:**

⇒ Soit f la fonction définie sur $I =]-\infty; 3]$ par : $f(x) = x^2 - 6x + 8$.

1)- Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, puis montrer que f est strictement décroissante sur I .

2)- Montrer que f admet une bijection réciproque f^{-1} définie sur $J = [-1; +\infty[$.

3)- Montrer que : $(\forall x \in J), f^{-1}(x) = 3 - \sqrt{x+1}$.

○ Exercice 13:

⇒ Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{1}{x} - 2\sqrt{x+1}$.

- 1) Justifier que $D_f = [-1; 0[\cup]0; +\infty[$.
- 2) Calculer les limites de f aux bornes de D_f .
- 3) Montrer que f est continue et strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.
- 4) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\left] \frac{1}{4}; 1 \right[$.
b) Vérifier que : $4\alpha^3 + 4\alpha^2 - 1 = 0$.

○ Exercice 14:

⇒ Soit f la fonction définie sur $I =]-\infty; -1]$ par : $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

- 1) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; puis montrer que f est continue sur I .
- 2) Montrer que : $(\forall x \in I), f'(x) = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$; puis déduire que f est strictement décroissante sur I .
- 3) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $J = [-1; 0[$.
b) Calculer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

○ Exercice 15:

⇒ Soit f la fonction définie sur $I = [4; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{-x^2}{4} + x\sqrt{x} - x + 1 .$$

- 1) a) Vérifier que : $(\forall x \in I), f(x) = 1 - \frac{1}{4}(x - 2\sqrt{x})^2$.
b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.
- 2) a) Montrer que : $(\forall x \in I), f'(x) = \frac{-1}{2}(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 2)$, puis en déduire que f est strictement décroissante sur I .
b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans I , puis vérifier que $\frac{64}{9} < \alpha < \frac{121}{16}$.
- 3) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $J =]-\infty; 1]$.
b) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.
c) En déduire que $\alpha = 4 + 2\sqrt{3}$.

○ Exercice 16:

⇒ On considère la fonction : $f : x \mapsto \frac{\sqrt[3]{x^2} - x}{x}$.

✓ Déterminer D_f ; puis calculer les limites de f aux bornes de D_f .

○ Exercice 17:

⇒ Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = x^4 - 6x^2 + x + 1.$$

1)- Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]-1;1[$.

2)- a)- Dresser le tableau de variation de f sur $[-1;1]$.

b)- Montrer que $f(\alpha) > 0$; puis en déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $]-1;1[$.

○ Exercice 18:

⇒ Soit f la fonction définie sur $I =]-1; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1-x^3}{1+x^3}$.

1)- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$.

2)- a)- Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $J =]-1; +\infty[$.

b)- Calculer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

○ Exercice 19:

✓ Calculer chacune des limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 + \sqrt[3]{4x} - \sqrt{4x+1}}{x-2} ; \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x + \sqrt[3]{x} - 2} ; \lim_{x \rightarrow 2} \frac{6 - \sqrt[3]{4x} \cdot \sqrt{4x+1}}{x-2}.$$

$$\text{Et } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2(1-\sqrt{x})} - \frac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})}.$$

○ Exercice 20:

✓ Calculer chacune des limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{3x^4 + x} - 4}{x} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{8x^3 - x} - \sqrt[3]{x^3 + 2x}}{x} ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[4]{x^4 + x} - 3}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1+x^2} - \sqrt[3]{1-x^3} \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} \right)$$

○ **Exercice 21:**

⇒ Soit a, b, c des nombres réels strictement positifs tel que : $a + b \leq c$.

✓ Montrer que : $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{c} \Rightarrow (a + b - c)^3 + 27abc = 0$.

○ **Exercice 22:**

⇒ Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x^3 - 3x - 3$.

1)- Dresser le tableau de variation complet de f .

2)- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans \mathbb{R} et que $2 < \alpha < 3$.

3)- On pose : $a = \frac{\sqrt[3]{12 + 4\sqrt{5}}}{2}$. Montrer que $\alpha = a + \frac{1}{a}$.

○ **Exercice 23:**

⇒ Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

1)- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique a dans $[\sqrt[3]{2}; +\infty[$.

2)- Montrer que l'équation $f(x) \neq x$ admet une solution unique b dans $]a; +\infty[$.

3)- Montrer que : $(\exists c \in]0; a[), \sqrt[3]{c+2} \cdot f(c) = 2c - a$.

○ **Exercice 24:**

⇒ Soit f la fonction définie sur $I = [-1; 0[$ par : $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x}$.

1)- Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, puis montrer que f est continue sur I .

2)- Montrer que : $(\forall x \in]-1; 0[), f'(x) = -\frac{x+2}{2x^2\sqrt{x+1}}$, puis en déduire que f est strictement décroissante sur I .

3)- Montrer que l'équation $f(x) = x^3$ admet une solution unique a dans I et que $-\frac{3}{4} < a < -\frac{1}{2}$.

4)- a)- Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera .

b)- Calculer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

5)- Résoudre dans \mathbb{R} , l'équation $f^{-1}(x) = f(x)$.

Fin Du Sujet

Bon Courage et Bonne Chance