

Equations différentielles linéaires

I) Equation Différentielle Linéaire du 1^{er} ordre : $y' = ay$ avec $a \in \mathbb{R}$

Définitions :

- 1 - L'équation suivante : $(E) : y' = ay + b$ ou a et b deux constante, est appelé équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre **un**, ou y est la fonction inconnue.
- 2 - On appelle solution de l'équation différentielle (E) , toute fonction f qui vérifie (E) .

Propriétés : - Les solutions de (E) sont les fonctions $x \mapsto ke^{ax} - \frac{b}{a}$ où k est un réel.

- Quel que soit le couple $(x_0; y_0)$ de réels, équation différentielle (E) admet une unique solution f qui vérifie $f(x_0) = y_0$

II) Equation Différentielle Linéaire du 2nd ordre : $y'' + ay' + b = 0$ avec $(a; b) \in \mathbb{R}^2$

Définition :

L'équation $r^2 + ar + b = 0$, s'appelle l'équation caractéristique de l'équation différentielle $(E) : y'' + ay' + b = 0$

Exemple :

L'équation caractéristique de $y'' + 8y' + 3 = 0$ est $r^2 + ar + b = 0$

Résolution d'une équation (E) : Soit Δ le discriminant de l'équation caractéristique.

Δ	L'équation caractéristique admet	Les solutions de (E) sont les fonctions
$\Delta > 0$	Deux solutions réelles r_1 et r_2	$y : x \mapsto ae^{r_1 x} + be^{r_2 x}$ ou $(a, b) \in \mathbb{R}^2$
$\Delta = 0$	Une seule solution réelle r	$y : x \mapsto (ax + b)e^{rx}$ ou $(a, b) \in \mathbb{R}^2$
$\Delta < 0$	Deux solutions complexes conjuguées $r_1 = p + iq$ et $r_2 = p - iq$	$y : x \mapsto e^{px} (a \cos(qx) + b \sin(qx))$ ou $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

Rappel : Les solutions de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$,
sont les fonctions $y : x \mapsto a \cos(\omega x) + b \sin(\omega x)$ ou $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

EXERCICES ET PROBLÈMES

Exercice1:

Soit (E) l'équation différentielle: $y' = 3y + 1$.

1. Résous l'équation (E) .
2. Déterminer la solution f de (E) qui prend la valeur 6 en 0

Exercice2:

Soit (E_1) l'équation différentielle : $y'' + 16y = 0$

1. Résous l'équation (E_1) .
2. Déterminer la solution f de (E_1) , telle que:

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2 \quad \text{et} \quad f'(\pi) = 8.$$

3. Montrez que, $(\forall x \in \mathbb{R}) : f(x) = 2\sqrt{2} \cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Exercice3 :

Soit (E_2) l'équation : $y'' + y' - 2y = 0$.

1. Résous l'équation (E_2) .

2. Déterminer la solution f de (E_2) , qui vérifie les deux conditions $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.

Exercice4 :

Soit (E_3) l'équation différentielle : $y'' - 4y' + 4y = 0$

1. Résous l'équation (E_3) .
2. Déterminer la solution f de (E_3) , qui vérifie les deux conditions $f(0) = 4$ et $f'\left(\frac{1}{2}\right) = e$.

3. Calculer l'intégrale $I = \int_0^1 f(x) dx$.

Exercice5 :

Soit (E_4) l'équation différentielle: $y'' - 4y' + 13y = 0$.

1. Résous l'équation (E_4) .
2. Déterminer la solution f de (E_4) , qui vérifie les deux conditions $f(0) = 0$ et $f'(0) = 6$.
3. En déduire l'intégrale $I = \int_0^1 f(x) dx$.