

Exercice 1 :**1^{ère} partie :**

Soit f la fonction numérique d'une variable réelle x définie par: $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 4} + x}{x}$.

- ① - a - Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f .
b - Trouver les limites de f aux bornes des intervalles de l'ensemble de définition D_f .
- ② - Etudier les branches infinies de la courbe (\mathcal{C}_f) .
- ③ - Montrer que la courbe (\mathcal{C}_f) admet un centre de symétrie $\Omega(0,1)$.
- ④ - Etudier la dérivabilité de f en 2 à droite et interpréter le résultat géométriquement.
- ⑤ - Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in D_f$.

2^{ème} partie :

Soit g la fonction numérique d'une variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} g(x) = f(x) & ; x \in]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[\\ g(x) = \sqrt{4 - x^2} + 1 & ; x \in]-2; 2[\end{cases}$$

- ① - a - Déterminer D_g l'ensemble de définition de la fonction g .
b - Montrer que la restriction de g à l'intervalle $] -2; 2[$ est une fonction paire.
- ② - Montrer que la fonction g est continue en 2.
- ③ - Etudier la dérivabilité de g en 2 à gauche et interpréter le résultat géométriquement.
- ④ - Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in]-2; 2[$.
- ⑤ - Dresser le tableau de variation de g .
- ⑥ - Tracer (\mathcal{C}_g) dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

3^{ème} partie :

Soit h restriction de g à l'intervalle $[2; +\infty[$.

- ① - Montrer que la fonction h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
- ② - Montrer que la fonction h^{-1} est dérivable sur J .
- ③ - Dresser le tableau de variation de h^{-1} .
- ④ - Tracer $(\mathcal{C}_{h^{-1}})$ dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .
- ⑤ - Calculer $(\forall x \in J): h^{-1}(x)$.

Exercice 2 :

Soit f la fonction numérique d'une variable réelle x définie par: $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2(x+2)}$

① - Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f , et calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

② - Calculer les limites suivantes et interpréter les résultats géométriquement :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{x-1} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{x-1} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{f(x)}{x-2}.$$

③ - a - Etudier la dérivabilité de la fonction f sur $D_f - \{1\}$.

b - Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in D_f - \{1\}$.

c - Etudier les variations de f .

⑤ - Etudier les branches infinie de la courbe (\mathcal{C}_f) .

⑥ - Tracer (\mathcal{C}_f) dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . (On prends $\sqrt[3]{2} \approx 1,25$ et $\sqrt[3]{4} \approx 1,6$).

Exercice 3 :

Soit f la fonction numérique d'une variable réelle x définie par: $f(x) = x - 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$

① - a - Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f .

b - Trouver les limites de f aux bornes des intervalles de l'ensemble de définition.

② - a - Montrer (Δ) d'équation $y = x - 1$ est une asymptote oblique à la courbe (\mathcal{C}_f) au voisinage de $+\infty$.

b - Etudier les positions relatives de (\mathcal{C}_f) et la droite (Δ) .

③ - Etudier la dérivabilité de g en 0 à droite et interpréter le résultat graphiquement.

④ - Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in D_f$, puis Dresser le tableau de variation de f .

⑤ - Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α tel que $2\sqrt{2} < \alpha < \frac{27}{8}$.

⑥ - Soit g restriction de f à l'intervalle $]1; +\infty[$.

a - Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.

b - Montrer que : $g^{-1}(6) = 8$.

c - Montrer que la fonction g^{-1} est dérivable au point $y_0 = 6$.

d - Calculer $(g^{-1})'(6)$.

⑥ - Tracer (\mathcal{C}_f) , $(\mathcal{C}_{g^{-1}})$ et (Δ) dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .