Les Suites numériques (série n°2)

Exercice 1 :

Soit f la fonction définie sur $I=[1;2]$ *par :* $f(x)=\dfrac{5x-1}{x+3}$.

① - *Etudier les variations de la fonction f.*

② - *Montrer que :* $f(I)\subset I$.

③ - *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par :* $\begin{cases} u_0=2 \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$; $(\forall n\in\mathbb{N})$.

a - *Montrer que :* $(\forall n\in\mathbb{N}):\quad 1\le u_n\le 2$.

b - *Montrer que la suite* (u_n) *est décroissante.*

c - *Montrer que la suite* (u_n) *est convergente et déterminer sa limite.*

Exercice 2 :

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{1}{2}\sqrt{3+x^2}$.

① - *Etudier les variations de la fonction f sur* $\mathbb{R}^+$.

② - *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'équation* $f(x)=x$.

③ - *Montrer que :* $(\forall x\in[0;1]):\ f(x)\ge x$.

④ - *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par :* $\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$; $(\forall n\in\mathbb{N})$.

a - *Montrer que :* $(\forall n\in\mathbb{N}):\quad 0\le u_n\le 1$.

b - *Déterminer le sens des variations de la suite* (u_n).

c - *Montrer que la suite* (u_n) *est convergente et déterminer sa limite.*

Exercice 3 :

☺ 1ère partie :

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x)=\left(\dfrac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}\right)^2$.

① - *Déterminer* D_f *l'ensemble de définition de la fonction f , puis calculer* $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)$.

② - *Etudier la dérivabilité de f en 0 à droite et interpréter le résultat géométriquement.*

③ - a - *Calculer* $f'(x)$ *pour tout* $x\succ 0$.

b - *Dresser le tableau de variation de f.*

④ - *Etudier les positions relatives de* $(\mathscr{C}_f)$ *et la droite* (Δ) *d'équation* $y=x$.

⑤ - *Etudier la concavité de la courbe* $(\mathscr{C}_f)$.

⑥ - *Tracer* $(\mathscr{C}_f)$ *dans un repère orthonormé* $(O,\vec{i},\vec{j})$.

☺ 2ème partie :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par :* $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$; $(\forall n \in \mathbb{N})$.

① - *Montrer que :* $(\forall n \in \mathbb{N})$: $0 \le u_n \le 4$.

②- *Déterminer le sens des variations de la suite* (u_n).

③- *Montrer que la suite* (u_n) *est convergente et déterminer sa limite.*

☺ 3ème partie :

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par :* $(\forall n \in \mathbb{N})$: $v_n = 1 - \dfrac{2}{\sqrt{u_n}}$.

① - *Montrer que* (v_n) *est une suite géométrique et déterminer sa raison.*

② - *Calculer* v_n *Puis en* u_n *en fonction de n.*

③ - *Calculer :* $\lim\limits_{n\mapsto\infty} u_n$.

✍ Exercice 4 :

☺ 1ère partie :

On considère la fonction numérique f définie sur $[0;+\infty[$ *par :* $f(x) = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} - x$.

① - a - *Vérifier que :* $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$: $f(x) = x\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - 1\right)$.

b - *Calculer* $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)$ *et étudier la branche infinie de la courbe* $(\mathscr{C}_f)$.

② - a - *Etudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 0, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.*

b - *Calculer* $f'(x)$ *pour tout* $x \in]0;+\infty[$.

c - *Dresser le tableau de variations de la fonction f.*

③ - a - *Montrer que :* $(\forall x \in]0;1[)$: $f(x) - x = x\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - 2\right)$.

b - *En déduire que :* $(\forall x \in]0;1[)$: $f(x) \succ x$.

④ - a - *Montrer que l'équation* $f(x) = 0$ *admet une solution unique* α *dans l'intervalle* $]1;+\infty[$.

b - *Montrer que le réel* α *vérifie :* $\alpha^3 - 4\alpha^2 - \alpha = 0$, *puis en déduire la valeur de* α.

☺ 2ème partie :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par :* $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{8} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$; $(\forall n \in \mathbb{N})$.

① - *Montrer que :* $(\forall n \in \mathbb{N})$: $\dfrac{1}{8} \le u_n \prec 1$.

②- *Déterminer le sens des variations de la suite* (u_n).

③- *Montrer que la suite* (u_n) *est convergente et déterminer sa limite.*