

Exercice 1 :

Déterminer la limite de la suite (u_n) dans les cas suivants :

$$\textcircled{1} - u_n = \frac{5n^2 - 3n + 7}{n^2 + n + 1} \quad \because \quad \textcircled{2} - u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n+1} \quad \because \quad \textcircled{3} - u_n = \sqrt{\frac{4n+3}{n+2}}$$

$$\textcircled{4} - u_n = \frac{2n + (-1)^n}{3n + 7} \quad \because \quad \textcircled{5} - u_n = \frac{5^n - 3^n}{5^n + 3^n} \quad \because \quad \textcircled{6} - u_n = \frac{4^n + 2^n}{3^n - 7^n}$$

Exercice 2 :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt{\frac{2}{3}u_n^2 + 2} \end{cases} ; (\forall n \in \mathbb{N})$$

① - a - Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n > \sqrt{6}$.

b - Montrer que la suite (u_n) est strictement décroissante, et qu'elle est convergente.

② - On pose : $(\forall n \in \mathbb{N}) : v_n = u_n^2 - 6$.

a - Montrer que (v_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison et son premier terme.

b - Calculer v_n puis en u_n en fonction de n .

c - Calculer : $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

Exercice 3 :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ u_{n+2} = \frac{2}{5}u_{n+1} - \frac{1}{25}u_n \end{cases}, (\forall n \in \mathbb{N})$$

On pose : $(\forall n \in \mathbb{N}) : a_n = u_{n+1} - \frac{1}{5}u_n$ et $b_n = 5^n u_n$

① - Montrer que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique. puis calculer $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en fonction de n .

② - Etudier la nature de $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

③ - a - Calculer $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en fonction de n .

b - Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : 0 < u_{n+1} \leq \frac{2}{5}u_n$

c - Dédire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : 0 < u_n \leq \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$.

④ - Calculer : $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

Exercice 4 :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = \frac{6u_n + 4}{u_n + 6} \end{cases} ; (\forall n \in \mathbb{N}).$$

① - Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n \geq 2$.

② - Montrer que la suite u_n est décroissante, et qu'elle est convergente.

③ - On pose : $(\forall n \in \mathbb{N}) : v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 2}$.

a - Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique et déterminer sa raison.

b - Calculer (v_n) puis (u_n) en fonction de n .

④ - Calculer : $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

Exercice 5 :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = \sqrt[3]{\frac{2}{7}} \\ u_{n+1} = \sqrt[3]{\frac{u_n^3 + 1}{8}} \end{cases} ; (\forall n \in \mathbb{N}).$$

① - Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n > \sqrt[3]{\frac{1}{7}}$.

② - Montrer $(\forall n \in \mathbb{N}) : \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, Conclure.

③ - On pose : $(\forall n \in \mathbb{N}) : v_n = \frac{7}{8}u_n^3 - \frac{1}{8}$.

a - Montrer que (v_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison.

b - Calculer (v_n) puis (u_n) en fonction de n .

④ - Calculer : $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

⑤ - Calculer la somme : $S_n = u_0^3 + u_1^3 + \dots + u_n^3$ en fonction n .

Exercice 6 :

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ deux suites définies par :

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} \end{cases} ; (\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_1 = 12 \\ v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4} \end{cases} ; (\forall n \in \mathbb{N}^*).$$

① - Calculer : u_2 , v_2 et v_3 .

② - On pose : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : w_n = v_n - u_n$.

a - Montrer que (w_n) est une suite géométrique et déterminer.

b - Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$.

③ - a - Montrer que la suite u_n est croissante et que la suite v_n est décroissante.

b - Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : u_n < v_n$ puis déduire que : $u_1 \leq u_n < v_n \leq v_1$.

c - En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.

④ - On pose : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : t_n = 3u_n + 8v_n$.

a - Montrer que (t_n) est une suite constante.

b - Exprimer (u_n) et (v_n) en fonction de n .