Exercice 1 :

☺ 1ère partie :

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ *par :* $g(x)=x(x-1)+\ln x$.

① - a - *Calculer* $g'(x)$ *pour tout* $x\in]0;+\infty[$.

b - *Etudier les variations de la fonction g.*

② - *Calculer* $g(1)$, *puis déduire le signe de* $g(x)$ *sur* $]0;+\infty[$.

☺ 2ème partie :

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ *par :* $f(x)=(x-1)^2+\ln^2(x)$.

① - *Calculer* $\lim\limits_{\substack{x\mapsto 0\\ x\succ 0}} f(x)$ *et interpréter le résultat géométriquement .*

② - *Calculer* $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, *puis étudier la branche infinie de courbe* $(\mathscr{C}_f)$ *au voisinage de* $+\infty$.

③ - a - *Montrer que :* $\forall x\in]0;+\infty[:\ f'(x)=\dfrac{2g(x)}{x}$.

b - *En déduire les variations de f sur* D_f .

④ - *Tracer* $(\mathscr{C}_f)$ *dans un repère orthonormé* $(O,\vec{i},\vec{j})$.

☺ 3ème partie :

Soit h la restriction de f à l'intervalle $I=]0;1]$.

① - *Montrer que la fonction h admet une fonction réciproque* h^{-1} *définie sur un intervalle J à déterminer .*

② - *Tracer* $(\mathscr{C}_{h^{-1}})$ *dans le repère* $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Exercice 2 :

☺ 1ère partie :

Soit f la fonction numérique définie par : $\begin{cases} f(x)=x(\ln x)^2+x & ;\ x\succ 0\\ f(0)=0 \end{cases}$.

① - *Déterminer* D_f .

② - a - *Montrer que :* $\lim\limits_{\substack{x\mapsto 0\\ x\succ 0}} x(\ln x)^2=0$.

b - *En déduire que la fonction f continue à droite du point* $x_0=0$.

c - *Etudier la dérivabilité de f en 0 à droite et interpréter le résultat géométriquement.*

③ - *Calculer* $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)$, *puis étudier la branche infinie de courbe* $(\mathscr{C}_f)$ *au voisinage de* $+\infty$.

④ - *Calculer* $f'(x)$ *pour tout* $x\in D_f-\{0\}$, *et étudier les variations de la fonction f.*

⑤ - a - *Calculer* $f''(x)$ *pour tout* $x\in D_f-\{0\}$.

b - *Etudier la concavité de la courbe* $(\mathscr{C}_f)$.

⑥- a - Déterminer d'équation de la droite (Δ) tangente à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ au point d'abscisse $x_0 = 1$.

b - Etudier les positions relatives de $(\mathscr{C}_f)$ et la droite (Δ).

⑦- Tracer $(\mathscr{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

⑧- a - Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer .

b - Montrer que f^{-1} est dérivable sur J.

c - Calculer $(f^{-1})'(1)$.

d - Tracer $(\mathscr{C}_{f^{-1}})$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

☺ 2ème partie :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{e} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$; $(\forall n \in \mathbb{N})$.

①- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $\dfrac{1}{e} \leq u_n \leq 1$.

②- Montrer que la suite (u_n) est croissante.

③- Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 3 :

☺ 1ère partie :

Soit g la fonction définie par : $g(x) = x - \ln x$.

①- Déterminer D_g, puis trouver les limites de f aux bornes de D_g.

②- Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in D_g$, et étudier les variations de la fonction g.

③- En déduire que : $(\forall x \in]0;+\infty[)$: $\ln x \prec x$.

☺ 2ème partie :

Soit f la fonction numérique définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x+\ln x}{x-\ln x} & ; x \succ 0 \\ f(0) = -1 \end{cases}$.

①- Déterminer D_f.

②- a - Montrer que la fonction f est continue en 0 à droite .

b - Etudier la dérivabilité de f en 0 à droite et interpréter le résultat géométriquement.

③- Calculer $\lim_{x\mapsto+\infty} f(x)$ et interpréter le résultat géométriquement.

④- Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in D_f - \{0\}$, et étudier les variations de la fonction f.

⑤- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α tel que $\dfrac{1}{2} \prec \alpha \prec 1$.

⑥- Tracer $(\mathscr{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.(On prends $e \approx 2,7$ et $\ln 2 \approx 0,7$).

idrissi405@gmail.com