EXERCICES ET PROBLÈMES

Dans tous les exercices, l'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

EXERCICE1:

On considère les quatre points ***A,B,C*** et ***I*** de coordonnées respectives :

$A(-1;2;1)$, $B(1;-6;-1)$, $C(2;2;2)$ et $I(0;1;-1)$

1) a) Calculer le produit vectoriel : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$

b) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC)

2) Soit **(Q)** le plan d'équation : $x+y-3z+2=0$

et **(Q')** le plan de repère $(O,\vec{i},\vec{k})$.

a) Pourquoi **(Q)** et **(Q')** sont-ils sécants ?

b) Donner une représentation paramétrique de la droite d'intersection **(Δ)** des plans **(Q)** et **(Q').**

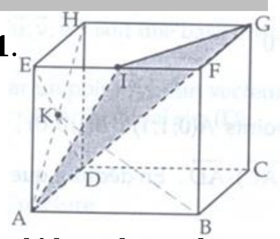
3) Ecrire une équation cartésienne de la sphère **(S)** de centre ***I*** et de rayon **2**.

4) On considère les points ***J*** et ***K*** de coordonnées respectives : $J(-2;0;0)$ et $K(1;0;1)$

- Déterminer l'intersection de la sphère **(S)** et de la droite **(*JK*)**.

EXERCICE2:

ABCDEFCH est un cube de côté **1**. L'espace est orienté par le repère orthonormé direct $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.



I est le milieu de **[*EF*]** et ***K*** est le centre du carré ***ADHE***.

1) Vérifier que $\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{IG}\wedge\overrightarrow{IA}$. En déduire l'aire du triangle ***ICA***.

2) Calculer le volume du tétraèdre ***BICA***. En déduire la distance du point ***B*** au plan **(*ICA*)**.

EXERCICE3:

On donne les points **A(1,1,0)** , **B(1,-1,1)** et **C(0,1,1)** et soit le plan. $(P):\ x+2y-2z+1=0$

1) Calculer $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ et en déduire que les points ***A*** , ***B*** et ***C*** ne sont pas alignés

a) Montrer que : $(ABC):\ 2x+y+2z-3=0$.

b) Vérifier que les plans **(P)** $\perp$ **(ABC)** .

c) Donner une représentation paramétrique de la droite **(D)** intersection des plans **(P)** et **(ABC)**.

d) Soit le point ***I*(2,1,1)** et ***M*** un point de **(D)** . Déterminer ***M*** pour que la distance ***IM*** soit minimale et en déduire $d(I,(D))$.

2) **a)** Montrer que les points ***I* , *A*, *B*** et ***C*** ne sont pas coplanaires .

b) Calculer le volume du tétraèdre ***IABC*** .

c) Calculer $d(I;(ABC))$ et en déduire l'aire du triangle ***ABC***.

3) Soit l'ensemble **(S)** des points ***M*(*x,y,z*)** vérifiant :

$$x^2+y^2+z^2-4x-2y-2z+\frac{38}{9}=0.$$

a) Montrer que S est une sphère de centre ***I*** et tangente au plan **(ABC)**.

b) Déterminer une équation cartésienne du plan **(Q)** tangent à la sphère **(S)** et strictement parallèle à **(ABC)** .

c) Montrer que le plan **(P)** coupe la sphère **(S)** suivant un cercle **(Γ)** dont on précisera son rayon ***r*** et les coordonnées de son centre **K** .

EXERCICE4:

Considérons les points $A(1;1;2)$; $B(0;1;1)$ et le vecteur $\vec{N}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$.

1) Montrer que O , A et B ne sont pas alignés.

2) Montrer que le vecteur $\vec{N}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.

3) En déduire une équation cartésienne du plan (OAB).

4) Soit le plan $(P): x+y-z=0$.

a- Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par A et perpendiculaire à (P)

b- Déterminer les points M de (Δ) tel que $d(M;(P))=1$.

c- Caractériser l'ensemble des points M de (P) tel que $d(M;(\Delta))=\sqrt{2}$.

4) **a-** Donner une équation cartésienne du plan médiateur **(Q)** du segment $[AB]$.

B - Montrer que **(Q)** et (P) sont sécants.

EXERCICE5 :

On considère les points **A(2,2,0)** ; **B(0,2,2)** et **C(1,0,1).**

1) Calculer les coordonnées de $\vec{u}=\overrightarrow{CA}\wedge\overrightarrow{CB}$.

2) Déterminer une équation du plan **(ABC)**.

3) **(D)** étant l'intersection du plan (P) et de l'axe $(O,\vec{i})$, **E** étant l'intersection du plan (P) et de l'axe $(O,\vec{k})$.

- Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{AB}$. Et Calculer $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DE}$.

4) Montrer que le triangle ***ABC*** est isocèle et calculer son aire.

5) Déterminer les coordonnées du centre de gravité du triangle ***ABC***.

6) **a)** Calculer $d(I;(P))$ avec ***I*(0 ;2 ;0).**

b) Déterminer le volume du tétraèdre ***IBCA*** par deux méthodes différentes.

EXERCICE6:

On donne les points ***A*(2,1,0) ; *B*(1,2,2)** et ***C*(3,3,1).**

1) a) Calculer $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.

b) En déduire que les points ***A***, ***B*** et ***C*** ne sont pas alignés.

c) Montrer que $(ABC): x-y+z-1=0$.

d) Calculer le volume du tétraèdre ***OABC***.

2) Soit ***H*** le projeté orthogonal du point **O** sur le plan **(*ABC*).** Déterminer ***OH***.

3) **a)** Montrer que le triangle ***ABC*** est équilatéral.

b) Déterminer les coordonnées du point ***G*** centre de gravité du triangle ***ABC***.

4) Soit S l'ensemble des points ***M*** **(*x* , *y* , *z*)** tels que :

$$x^2+y^2+z^2-2x-6y+5=0.$$

a) Vérifier que **(*S*)** est une sphère dont on précisera les coordonnées du centre ***I*** et le rayon ***R***.

b) Vérifier que les points ***A***, ***B*** et **C** appartiennent à **(S).**

c) En déduire l'intersection de la sphère **(S)** et le plan (ABC).

d) Donner des équations cartésiennes des plans (P_1) et (P_2) parallèles à (ABC) et tangents à **(S).**

EXERCICE7:

On considère les points ***A*(-1 , -1 , 1) ; *B*(-1 , 2 , -2)** et le plan (P) dont une équation cartésienne est : $x+y+z-2=0$.

1) Montrer que la droite (AB) est parallèle au plan (P).

2) Soit α un réel et (S_α) l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace tel que :

$$x^2+y^2+z^2+2x-2\alpha y+2\alpha z+\alpha^2+\alpha=0.$$

a- Montrer que ,pour tout réel α, (S_α) est une sphère de centre I_α et de rayon $R_\alpha=\sqrt{\alpha^2-\alpha+1}$.

b- Montrer que ,quand α varie dans **IR**, I_α décrit la droite (AB).

3) Etudier suivant les valeurs de α, les positions relatives de (S_α) et du plan (P).

4) Soit I le milieu de $[AB]$ et $I_{1-\alpha}$ le centre de la sphère $(S_{1-\alpha})$.

a- Montrer que I est le milieu de $[I_\alpha;I_{1-\alpha}]$.

b- En déduire que les sphères (S_α) et $(S_{1-\alpha})$ sont symétrique par rapport au point I.

EXERCICE8:

Soit

$$S=\{M(x,y,z)/\,x^2+y^2+z^2-2x+4y+4z+5=0\}$$

On considère ***A*(−2 ;0 ;0),*B*(0 ; 1 ;0)** et ***C*(0 ;0 ;−1)**

1)Montrer que **(S)** est une sphère dont on déterminera le centre **Ω** et le rayon **R .**

2)a) Calculer $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.

b) En déduire que : $(ABC): x-2y+2z+2=0$

3) a) Montrer que les points ***A, B, C*** et **Ω** ne sont pas coplanaires

b) Calculer le volume du tétraèdre ***Ω ABC***

c) Calculer l'aire du triangle ***ABC***, puis en déduire la distance de point **Ω** au plan **(*ABC*)**

d) En déduire l'intersection de la sphère **(S)** et le plan **(*ABC*)** est un cercle dont on précisera le centre ***I*** et le rayon ***r***.