

LIMITES ET CONTINUITÉ (2)

Exercice (1)

Calculer les limites suivantes

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)}{x-1}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x - \tan 2x}{x^3}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 2x^2 + 1}{4x^2 + 3x + 2} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x - \sqrt[3]{x^2 + 8}}{\sqrt[3]{x^2 + 1} - \sqrt{1 - x^2}}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x (\arctan 2x - \arctan 3x)$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + 2x} - 1 - x}{\sqrt[3]{1 - 3x} - 1 + x}$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan\left(\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2}\right)}{x^2}$	$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\sin(\cos x)}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2} \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{x} + 1}\right)$

Exercice (2)

Montrer que la fonction f admet un prolongement par continuité au point $a = 0$

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-3x} - 2x}{x^2} \qquad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} \sqrt[3]{1-3x} - 1}{x^2}$$

Exercice (3)

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$ et on pose $f_n(x) = \frac{(\sqrt{\cos x} - 1)(\sqrt[3]{\cos x} - 1) \dots (\sqrt[n]{\cos x} - 1)}{x^{2n-2}}$

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x)$

Exercice (4)

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2}{x^2} & ; \quad x \neq 0 \\ f(0) = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Déterminer D_f puis étudier la continuité de f sur D_f

Exercice (5)

Montrer que : $5 \arctan \frac{1}{7} + 2 \arctan \frac{3}{79} = \frac{\pi}{4}$ et $4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{70} + \arctan \frac{1}{99} = \frac{\pi}{4}$

Exercice (6)

(1) montrer que : $a - b = \left(a^{\frac{1}{p}} - b^{\frac{1}{p}} \right) \left(a^{\frac{p-1}{p}} + a^{\frac{p-2}{p}} b^{\frac{1}{p}} + \dots + a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{p-2}{p}} + b^{\frac{p-1}{p}} \right)$

(2) on considère la fonction $f(x) = x \left(\left(1 - x^{\frac{1}{p}} \right) - 1 \right)$ calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$