

## CONTINUITÉ

### Exercice

On considère la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \frac{1 - 2 \sin x \sin 3x}{\cos x + \cos 3x}$  ;  $x \neq \frac{\pi}{4}$  et

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

1) transformer  $\sin x \sin 3x$  en somme et  $\cos x + \cos 3x$  en produit

2) en déduire que  $f$  est continue en  $a = \frac{\pi}{4}$

### Exercice

Soit la fonction  $f$  telle que :  $f(x) = \frac{(1-x)\sqrt{1+2x}-1}{x^2}$  ;  $x \neq 0$  et  $f(0) = -\frac{3}{2}$

1) calculer la limite  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x}-1-x}{x^2}$

2) en déduire que  $f$  est continue en  $a = 0$

### Exercice

$f$  est une fonction définie par :  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}}$  ;  $x \neq 0$  et  $f(0) = -2$

1) calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2) montrer que  $f$  continue en  $a = 0$

### Exercice

Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = \left(x - E\left(\frac{\pi}{2x}\right)\right) \sin x$

1) montrer que  $(\forall a \in \mathbb{R}^*) \quad \lim_{x \rightarrow 0} x E\left(\frac{a}{x}\right) = a$

2) montrer que  $f$  admet un prolongement par continuité en  $0$  à déterminer

### Exercice

$a$  et  $b$  deux réels . soit la fonction  $f$  telle que :

$$f(x) = x ; x \leq 2 \quad \text{و} \quad f(x) = a - \frac{b}{x} ; 2 < x \leq 4 \quad \text{و} \quad f(x) = \frac{1}{x} ; x > 4$$

1) étudier la continuité de  $f$  sur  $]-\infty, 2[$  ;  $]2, 4[$  et  $]4, +\infty[$

2) déterminer  $a$  et  $b$  pour que  $f$  soit continue sur  $\mathbb{R}$

## CONTINUITÉ

### Exercice

Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = \frac{1 - \sqrt{1 + 3x^2} \cos(x)}{x^2}$  ;  $x \neq 0$  et  $f(0) = -1$

- 1) calculer  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + mx^2} - 1}{x^2}$  ( $m$  un paramètre strictement positif)
- 2) prouver que  $f$  est continue en  $a = 0$

### Exercice

On considère la fonction  $f$  telle que :  $f(x) = \frac{x^E(x) + 2}{x + 1}$

- 1) a) déterminer  $f(1)$  et montrer que  $f$  est continue à droite de  $a = 1$   
b)  $f$  est-elle continue en  $a = 1$  ?
- 2) a) calculer  $f(0)$  et montrer que  $f$  est continue à droite de  $b = 0$   
b)  $f$  est-elle continue en  $b = 0$  ?

### Exercice

- 1) calculer les limites  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + 2x} - 1 - x}{x^2}$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + 3x} - 1 - x}{x^2}$
- 2) en déduire les limites  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + 2x} - \sqrt[3]{1 + 3x}}{x^2}$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + 2x} \times \sqrt[3]{1 + 3x} - 1 - 2x}{x^2}$

### Exercice

- 1) montrer que l'équation  $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$  admet une seule solution  $\alpha$  et  $1 < \alpha < 2$
- 2) en déduire la solution de  $\sqrt[3]{x + \sqrt{x + 1}} = \sqrt{x}$

### Exercice

Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[4]{x-1} - \sqrt[3]{3-x}}{\sqrt{x-1} - \sqrt[3]{3-x}} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(\pi(x^2 + x - 12))}{x - 3}$$
$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{5\sqrt[3]{x^2-1} - 2\sqrt{x^3-2}}{\sqrt[3]{x^2-1}\sqrt{x^3-2} - 10} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[6]{32 - \sqrt{2-x^2}} \sqrt[3]{1 + \cos x}}{\sqrt[3]{2} \sqrt{2-x^2} - \sqrt{2} \sqrt[3]{1 + \cos x}}$$
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \arctan\left(\sqrt{1 + \frac{2}{x}} - 1 - \frac{1}{x}\right) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(\sqrt{1+x} - 1)}{x^2}$$
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \arctan 2x - \arctan \sqrt{x^2 + 1} \right) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{x+1}}\right)$$

## CONTINUITÉ

### Exercice

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = 2x - \cos x$

- 1) étudier le sens des variations de  $f$
- 2) montrer que  $f(x) = \frac{\pi}{6}$  admet une unique solution  $\alpha$  dans  $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$
- 3) lequel des intervalles  $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[$  ou  $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$  contient  $\alpha$
- 4) déterminer un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude  $\frac{\pi}{8}$

### Exercice

1) soit la fonction  $f$  définie sur  $I = ]-1, 1[$  par :  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

- a) calculer les limites de  $f$  et étudier les variations de  $f$
  - b) montrer que  $f$  est une bijection de  $I$  vers  $J$  à déterminer
  - c) exprimer  $f^{-1}(x)$  pour tout  $x$  de  $J$
- 2) soit  $F$  la fonction définie sur  $I$  par :  $F(x) = \arctan(f(x))$
- a) dresser le tableau de variation de  $F$
  - b) montrer que  $F$  est bijective de  $I$  vers  $K$  que l'on déterminera
  - c) exprimer  $F^{-1}(x)$  pour tout  $x$  de  $K$
- 3) en déduire que  $(\forall x \in \mathbb{R}) \sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

### Exercice

On considère la fonction  $f$  définie sur  $D = \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$  par :  $f(x) = \sin^2 x$

- 1) Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $D$  vers  $I$  à déterminer
- 2) prouver que  $(\forall x \in I) f^{-1}(x) = \arctan \sqrt{\frac{x}{1-x}}$
- 3) en déduire que  $(\forall x \in \mathbb{R}^+) \sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$