

Exercice 1

Etudier la dérivabilité de f au point a dans chacune des cas suivantes :

1) $f(x) = 2x - \sqrt[3]{2-x}$ et $a = 1$ 2) $f(x) = \sqrt{2+x} \cos(\pi x)$ et $a = -1$

3)
$$\begin{cases} f(x) = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{x-2}}\right) ; & x > 2 \\ f(2) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$
 et $a = 2$

Exercice 2

1) montrer que la fonction $g(x) = \sin x$ n'admet pas de limite en $+\infty$ et $-\infty$

2) on considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x \cos\left(\frac{1}{x}\right) ; & x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

a) montrer que f est dérivable en $a = 0$

b) calculer la dérivée $f'(x)$. f' admet-elle une limite au point $a = 0$?

Exercice 3

Soit f une fonction dérivable en $x_0 = 0$ telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$

montrer que
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\prod_{k=1}^{k=n} f(kx)}{x^n} = n!$$

Exercice 4

Soit f une fonction dérivable sur $[a, b]$ telle que $(\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2) (\forall x \in [a, b]) m \leq f'(x) \leq M$

1) montrer que $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$

2) montrer que $\left(\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]\right) 1 + \frac{x}{\sqrt{6}} \leq \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$

Exercice 5

Soit f une fonction dérivable sur $[0, 1]$ telle que $f'_d(0) = f(1) = 0$:

Montrer que $(\exists c \in]0, 1[) f'(c) = \frac{f(c)}{c}$

Exercice 6

f une fonction dérivable sur \mathbb{R}^+ telle que
$$\begin{cases} f(0) = 0 ; & f'_d(0) = 0 \\ (\exists a \in \mathbb{R}^{*+}) : & f(a)f'(a) < 0 \end{cases}$$

Montrer que $(\exists c \in \mathbb{R}^{*+}) f'(c) = 0$

Exercice 7

Soit f une fonction deux fois dérivable sur $[a, b]$

Montrer que $(\exists c \in]a, b[) f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2} f''(c)$

Exercice 8

Soit f une fonction deux fois dérivable sur $[a, b]$ telle que $f(a) = f(b) = 0$ et soit x_0 de $]a, b[$

Montrer que $(\exists c \in]a, b[) f''(c) = \frac{2f(x_0)}{(x_0-a)(x_0-b)}$