

## Exercice 1

## Etude d'une primitive

I] Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par : 
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{e^x - 1} & x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

- montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$
- a) montrer que  $(\forall x \in \mathbb{R}) 1 + (x-1)e^x \geq 0$   
b) calculer  $f'(x)$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}^*$  et étudier le sens de variation de  $f$

II] On considère la fonction  $F$  définie sur  $\mathbb{R}$  par : 
$$\begin{cases} F(x) = \int_x^{2x} \frac{t}{e^t - 1} dt ; x \neq 0 \\ F(0) = 0 \end{cases}$$

- a) montrer que  $(\forall x \in \mathbb{R}^*) \frac{2x^2}{e^{2x} - 1} \leq F(x) \leq \frac{x^2}{e^x - 1}$   
b) déduire que  $F$  est continue au point d'abscisse 0  
c) montrer que  $F$  est dérivable au point 0 et que  $F'(0) = 1$
- a) montrer que  $F$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  et que  $(\forall x \in \mathbb{R}^*) F'(x) = \frac{3 - e^x}{e^x + 1} f(x)$   
b) donner le tableau de variation de la fonction  $F$

## Exercice 2

Soit  $F$  la fonction définie par : 
$$F(x) = \int_x^{4x} \frac{\ln t}{2t - 1} dt$$

- montrer que  $F$  est définie sur  $D = \left]0, \frac{1}{8}\right[ \cup \left] \frac{1}{2}, +\infty\right[$
- montrer  $F$  est dérivable sur  $D$  et calculer  $F'(x)$
- soit  $x$  un élément de  $\left]1, +\infty\right[$ 
  - montrer  $(\exists c \in [x, 4x]) F(x) = \frac{3x \ln c}{2c - 1}$
  - déduire que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$  et déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}$
- soit  $x$  un élément de  $\left]0, \frac{1}{16}\right[$ . montrer que  $|F(x)| \leq -\int_x^{4x} 2 \ln t dt$  puis déduire  $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$

## Exercice 3

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\left]0, +\infty\right[$  par : 
$$f(x) = \int_1^{\sqrt{x}} \frac{e^t}{t} dt$$

- déterminer le signe de  $f(x)$
- montrer que  $f$  est dérivable sur  $\left]0, +\infty\right[$  et calculer  $f'(x)$
- a) montrer que  $(\forall x > 1) f(x) \geq \frac{1}{2} \ln x$  et calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

- b) montrer que  $(\forall x \in ]0,1[) f(x) \leq \frac{1}{2} \ln x$  et calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$
- 4) donner le tableau de variation de  $f$
- 5) montrer que  $(\forall x > 1) f(x) \geq \frac{e^{\sqrt{x}} - e}{\sqrt{x}}$  puis déduire la branche infinie de  $(C)$  au voisinage de  $+\infty$

### Exercice 4

I) Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = 1 + x - e^{-x}$

- 1) a) étudier le sens de variation de  $g$   
 b) calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  et donner le tableau de variation de  $g$
- 2) déduire le signe de  $g(x)$  et que  $x_0 = 0$  est l'unique solution de l'équation  $g(x) = 0$

II) On considère la fonction  $F$  définie sur  $[0, +\infty[$  par :  $F(0) = \frac{1}{2} \ln 2$  et  $\forall x > 0$   $F(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{g(t)} dt$

- 1) montrer que  $\forall t > 0$  ;  $\frac{1}{1+t} \leq \frac{1}{g(t)} \leq \frac{1}{t}$  et déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$
- 2) a) montrer que  $\forall t > 0$  :  $1 - t \leq e^{-t} \leq 1 - t + \frac{t^2}{2}$   
 b) montrer que  $\forall t \in ]0,4[$  ;  $\frac{1}{2t} \leq \frac{1}{g(t)} \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{t} + \frac{1}{4-t} \right)$  puis déduire que  $F$  est continue à droite de 0
- 3) a) montrer que  $F$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^{+*}$  et calculer  $F'(x)$   
 b) étudier le sens de variation de  $F$

### Exercice 5

I) Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^*$  par :  $f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$

- 1) calculer les limites de  $f$
- 2) étudier le sens de variation de  $f$
- 3) étudier les branches infinies de  $(C_f)$

II) On considère la fonction  $F$  définie sur  $[0, +\infty[$  par :  $F(x) = \int_{x^2}^{4x^2} f(t) dt$  ;  $x > 0$  et  $F(0) = 2 \ln 2$

- 1) a) vérifier que  $(\forall x > 0) \int_{x^2}^{4x^2} \frac{1}{t} dt = 2 \ln 2$   
 b) montrer que  $(\forall x \in \mathbb{R}) : e^x \geq x + 1$  et déduire  $(\forall t > 0) -t \leq e^{-t} - 1 \leq 0$
- 2) a) montrer que  $(\forall x > 0) -3x^2 \leq F(x) - 2 \ln 2 \leq 0$   
 b) montrer que  $F$  est continue, dérivable à droite de 0
- 3) montrer que  $(\forall t \geq 1) : f(t) \leq e^{-t}$  et déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$
- 4) a) montrer que  $F$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et calculer  $F'(x)$   
 b) donner le tableau de variation de  $F$
- 5) tracer la courbe

## Exercice 6

Soit  $G$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par :  $G(x) = \int_x^{2x} \frac{\ln t}{1+t} dt$  ;  $x > 0$  et  $G(0) = 0$

1) a) montrer que  $\left( \forall x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[ \right) (\exists c \in [x, 2x]) G(x) = \frac{x \ln c}{1+c}$

b) déduire que  $\left( \forall x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[ \right) \frac{x \ln x}{1+x} \leq G(x) \leq \frac{x \ln 2x}{1+2x}$

c) étudier la continuité et la dérivabilité de  $G$  à droite de 0

2) On pose  $\varphi(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t} dt$  pour tout  $x$  de  $]0, +\infty[$

a) montrer que  $\left( \forall x \in ]0, +\infty[ \right) G(x) = \varphi(2x) - \varphi(x)$

b) montrer que  $G$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et que  $G'(x) = \frac{\ln x + (1+x) \ln 4}{(1+x)(1+2x)}$

3) a) montrer que  $\left( \forall x > 1 \right) (\exists d \in [x, 2x]) G(x) = \frac{x \ln d}{1+d}$  (utiliser le théorème des accroissements finis)

b) montrer que  $\left( \forall x > 1 \right) \frac{x \ln x}{1+2x} \leq G(x) \leq \frac{x \ln 2x}{1+x}$

c) calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{G(x)}{x}$  donner une interprétation géométrique du résultat

4) on pose  $h(x) = \ln x + (x+1) \ln 4$

a) montrer que  $h(x) = 0$  admet un unique solution  $\alpha$  et que l'on a  $\frac{1}{6} < \alpha < \frac{1}{4}$

b) déduire le signe de  $h(x)$  puis dresser le tableau de variation de  $G$

## Exercice 7

Soit  $F$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par :  $F(x) = \int_1^x e^{-\frac{1}{t}} \ln t dt$

1) a) montrer que  $\left( \forall x \in \mathbb{R} \right) e^{-x} \geq 1 - x$  et déduire  $\left( \forall t \geq 1 \right) e^{-\frac{1}{t}} \ln t \geq \ln t - \frac{\ln t}{t}$

b) calculer  $I = \int_1^x \ln t dt$  et déduire  $\left( \forall x > 1 \right) F(x) \geq x \ln x - x + 1 - \frac{1}{2} (\ln x)^2$

2) montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$  puis déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}$

3) montrer que  $F$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et calculer la dérivée  $F'(x)$