

التمرين الأول

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{e^x}{e^{2x} + 1}$

دراسة دالة لوغاريتم

1) a) étudier la parité de f

b) calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, interpréter le résultat

2) a) montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f'(x) = \frac{e^x(1 - e^{2x})}{(e^{2x} + 1)^2}$

b) étudier le sens de variation de f et donner le tableau de variation

c) déduire que $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad 0 < f(x) \leq \frac{1}{2}$

3) construire la courbe (C_f)

4) montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $I = \left[0, \frac{1}{2}\right]$ une seule solution α

5) montrer que $(\forall x \in I) \quad |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

6) on considère la suite $(U_n)_n$ définie par : $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = f(U_n)$

a) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 \leq U_n \leq \frac{1}{2}$

b) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_n - \alpha|$

c) déduire que $(U_n)_n$ est convergente et déterminer sa limite

التمرين الثاني

Partie (1)

1) résoudre l'équation $2e^{-2x} - 2e^{-x} - 1 = 0$ et déduire le signe de $2e^{-2x} - 2e^{-x} - 1$

2) soit la fonction f définie par : $f(x) = 2e^{-x} - e^{-2x} - x$

a) calculer les limites $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

b) étudier les branches infinies de la courbe (C_f)

3) étudier le sens de variation de f et donner sa table de variation

4) montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions distinctes α , β

5) construire la courbe (C_f) (on donne $\alpha \approx -0,8$ et $\beta \approx 0,7$)

Partie (2)

Soit g la fonction définie sur $I = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ par : $g(x) = 2e^{-x} - e^{-2x}$

1) étudier le sens de variation de g , montrer que $g(I) \subset I$

2) montrer que $(\forall x \in I) \quad |g'(x)| \leq \frac{1}{2}$

3) on considère la suite $(U_n)_n$ définie par : $U_0 = \frac{1}{2}$ et $U_{n+1} = g(U_n)$

a) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 \leq U_n \leq \frac{1}{2}$

دراسة دالة لوغاريتم

b) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |U_{n+1} - \beta| \leq \frac{1}{2} |U_n - \beta|$

c) déduire que $(U_n)_n$ est convergente et déterminer sa limite

التمرين الثالث

Soit n un entier naturel . on considère la fonction f_n définie par : $f_n(x) = -1 + n(2-x)e^x$

1) calculer les limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x)$

2) calculer $f'_n(x)$ et étudier le sens de variation de f_n puis dresser le tableau de variation

3) montrer que l'équation $(E_n) \quad f_n(x) = 0$ admet deux solutions $\alpha_n < 0$ et $\beta_n \in]1, 2[$

4) a) montrer que $(f_{n+1}(t) = (2-t)e^t) \Leftrightarrow (t \text{ solution de } (E_n))$

b) montrer que $f_{n+1}(\beta_n) > 0$ t déduire que $(\beta_n)_n$ est croissante

c) montrer que $(\beta_n)_n$ est convergente et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n = 2$

5) a) montrer que $(\alpha_n)_n$ est décroissante

b) montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = -\infty$

التمرين الرابع

Partie (1)

1) on pose $g(x) = e^x + x + 1$

a) montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution α

b) déduire le signe de $g(x)$

2) on considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{xe^x}{e^x + 1}$

a) étudier les branches infinies de la courbe (C_f)

b) calculer $f'(x)$

c) vérifier que $f(\alpha) = 1 + \alpha$ puis dresser le tableau de variation de f

d) tracer la courbe (C_f) dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) avec $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2 \text{ cm}$ (on prend $\alpha \approx -1,25$)

partie (2)

soit un entier naturel .

1) a) montrer que l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution α_n

b) étudier la monotonie de la suite $(\alpha_n)_n$

c) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \alpha_n \geq n$; déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$

2) a) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \alpha_n - n = ne^{-\alpha_n}$ et déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n - n$

b) montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \alpha_n - n = -\infty$

التمرين الخامس

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = e^{-x} \ln(1 + e^x)$

1) a) calculer les limites $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$

b) étudier les branches infinies

2) a) montrer que $(\forall t > 0) \ln(1+t) > \frac{t}{1+t}$

b) calculer $f'(x)$ et déduire que f est décroissante puis donner le tableau de variation

3) montrer que (C_f) coupe la droite $(\Delta) y = x$ en un point d'abscisse α appartenant à $]0, \ln 2[$

4) tracer la courbe (C_f)

5) on pose $I =]0, \ln 2[$. on considère la suite $(U_n)_n$ telle que $U_0 = \frac{1}{2}$ et $U_{n+1} = f(U_n)$

a) montrer que $(\forall x \in I) |f'(x)| \leq \frac{2}{3}$ $(\forall x \in I) |f'(x)| \leq \frac{2}{3}$

b) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) U_n \in I$

c) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3} |U_n - \alpha|$ déduire que $(U_n)_n$ est convergente et déterminer sa limite

التمرين السادس

Soit n un entier tel que $n \geq 2$.

on considère la fonction f_n définie sur $[0, +\infty[$ par : $f_n(x) = 1 - x - e^{-nx}$

1) montrer que $(\forall x \in]1, +\infty[) \ln x < x - 1$; déduire $(\forall x > 1) e^{x-1} > x$

2) a) calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$ et étudier le sens de variation de f_n

b) montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet dans $]0, +\infty[$ une seule solution a_n et que $a_n < 1$

3) a) étudier le sens de variation de la fonction $g(x) = \frac{\ln x}{x}$

b) montrer que la suite $(a_n)_{n \geq 3}$ est croissante et qu'elle est convergente

4) montrer que $f_n\left(1 - \frac{1}{n}\right) < 0$; déduire la limite de $(a_n)_n$

التمرين السابع

Soit n un entier non nul . on considère la fonction f_n définie par : $f_n(x) = e^x + \frac{x}{n}$

1) a) calculer les limites de f_n

b) étudier les variations de f_n et dresser le tableau de variation

2) montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une seule solution a_n et que $a_n \in]-\infty, 0[$

3) a) montrer que la suite $(a_n)_{n \geq 3}$ est décroissante

b) montrer que $f_n(-\ln \sqrt{n}) > 0$ et déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$

c) déterminer le signe de $f_n(-\ln(n))$. déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n}$

d) vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \frac{a_n}{\ln n} = -1 + \frac{\ln(-a_n)}{\ln n}$ puis déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{\ln n} = -1$