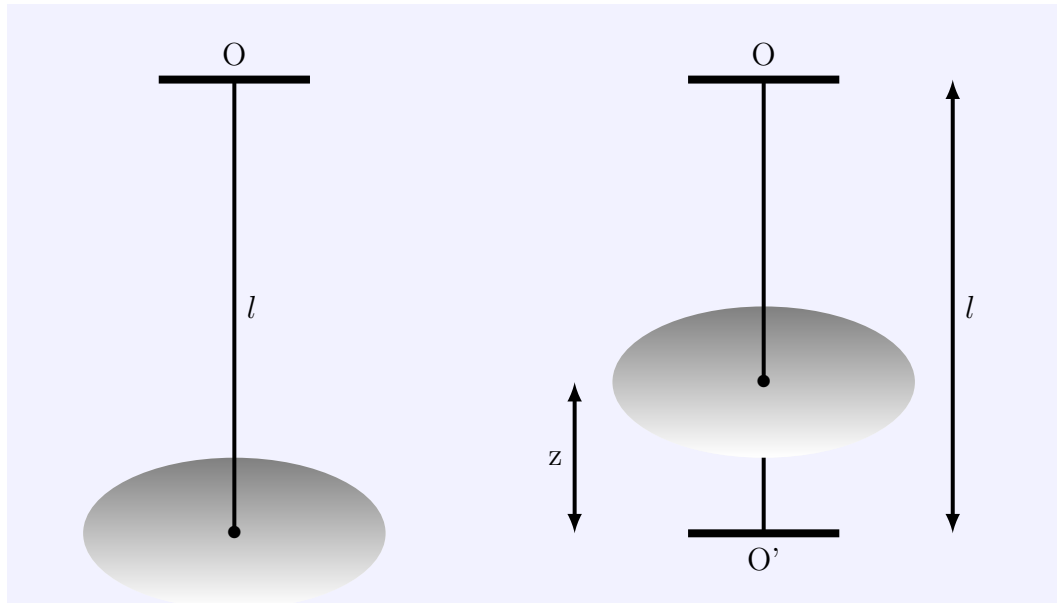


Problèmes de synthèse

Exercice 1 :

Un pendule de torsion est constitué par un fil métallique vertical de longueur $l = 0,50m$, fixé à l'une des extrémités un disque horizontal, homogène de moment d'inertie par rapport à son axe Δ , $J_{\Delta} = 5 \times 10^{-5} kg.m^2$. L'autre extrémité du fil est étant fixé à un point O_1 . Le système (disque+fil) peut tourner autour d'un axe fixe (Δ) matérialisé par le fil métallique et qui passe par le centre d'inertie du disque.



1. Déterminer la nature du mouvement du disque dans le plan horizontal
2. Calculer la constante de torsion C si la période propre $T_0 = 0,92s$
3. Que devient cette période si la longueur est divisée par deux ?
4. Les extrémités supérieure et inférieure du fil étant immobiles, on fixe le disque du pendule tel que son centre d'inertie se trouve à une distance z du point O' du fil. On néglige l'épaisseur du disque devant z . Les deux brins de fil ont une torsion nulle. L'axe de rotation du pendule est vertical.
 - (a) Déterminer la nature du mouvement de nouveau pendule et trouver la période T'_0 en fonction de T_0 , l et z sachant que la constante de torsion d'un fil est inversement proportionnelle à sa longueur, si le fil est homogène et de section constante.
 - (b) Calculer T'_0 . On donne $z = \frac{l}{3}$
 - (c) Montrer que la période T'_0 prend une valeur maximale T'_{max} lorsque z est égale une valeur z_m . Calculer z_m et déduire la valeur de T'_{max} .

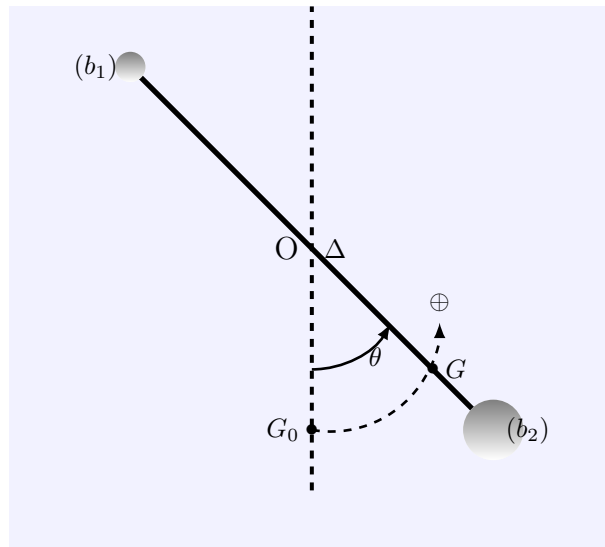
Exercice 2 :

Pour réaliser un pendule pesant, on fixe deux boules b_1 et b_2 ponctuelles de masses $m_1 = 50g$ et $m_2 = 4m_1$ aux bouts d'une tige homogène de masse négligeable et de longueur

$2l = 0,4m$ qui peut tourner autour d'un axe horizontal fixe (Δ) passant par son milieu O . La position d'équilibre stable du pendule pesant est lorsque le centre de gravité du système se coïncide avec G_0 . On écarte le pendule de sa position d'équilibre stable d'un angle très petit $\theta_m = \frac{\pi}{20} \text{ rad}$ et on l'abandonne sans vitesse initiale.

On repère à chaque instant la position du pendule par son abscisse angulaire $\theta = (\overrightarrow{OG_0}, \overrightarrow{OG})$ voir figure.

Le moment d'inertie du système par rapport à l'axe (Δ) est $J_\Delta = (m_1 + m_2)l^2$.



1. En utilisant la relation barycentrique, montrer que le centre de gravité du pendule pesant est :

$$OG = \frac{3}{5}l$$

2. En appliquant la relation fondamentale de la dynamique au pendule pesant, montrer que l'équation différentielle du mouvement s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{3g}{5l}\theta = 0$$

Quelle est la nature du mouvement de G ?

3. La solution de l'équation différentielle est la suivante $\theta(t) = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi_0\right)$, Déterminer l'expression de la période propre T_0 des oscillations en fonction de l, g . calculer T_0 .
4. On considère l'instant où le pendule passe par sa position d'équilibre stable avec une vitesse positive comme origine des dates. Écrire l'expression de l'équation horaire $\theta(t)$ en fonction du temps.
5. Soit $\vec{R}_T$ la composante tangentielle et $\vec{R}_N$ la composante normale de la réaction $\vec{R}$ appliquée par l'axe (Δ) à la tige.
 - (a) En appliquant la deuxième loi de Newton, déterminer, en fonction de m_1, m_2, g , et θ_m les expressions de $\vec{R}_T$ et $\vec{R}_N$, lorsque la tige est en position où $\theta = \theta_m$
 - (b) En déduire l'intensité de la réaction $\vec{R}$.

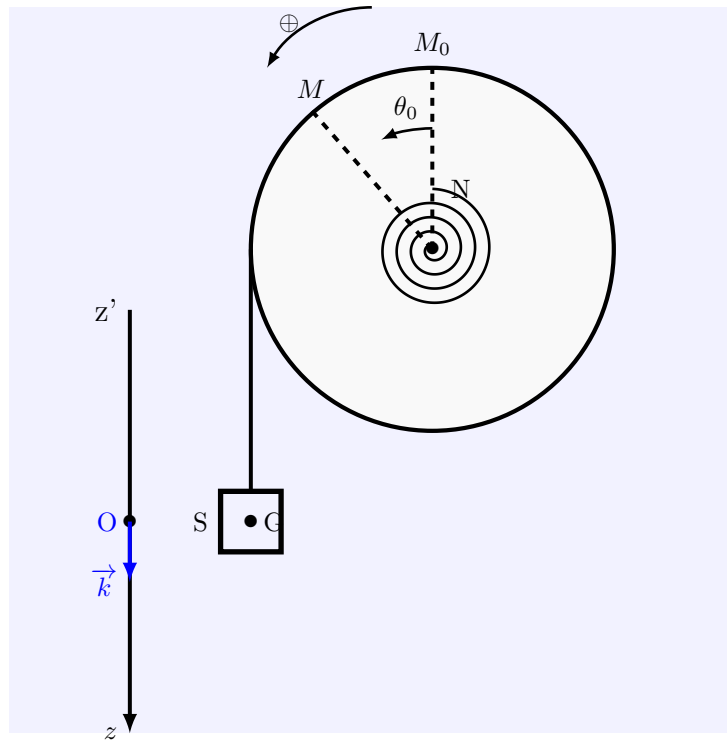
Exercice 3 :

Sur un disque homogène de rayon $r = 10\text{cm}$ soudé au son centre d'inertie à une tige cylindrique de masse négligeable et qui peut tourner autour d'un axe horizontal fixe et confondu avec l'axe du tige . Le moment d'inertie du disque est $J_{\Delta} = 2,50\text{kg.m}^2$, on entoure un fil dont l'extrémité libre supporte une masse $m = 42\text{kg}$. On fixe sur l'axe du disque l'extrémité d'un ressort spiral de masse négligeable , l'autre extrémité N étant liée à un support fixe .

Lorsque le ressort spirale n'est pas déformé, l'abscisse angulaire est nul ($\theta = 0$)

À l'équilibre, Le centre d'inertie du corps de masse m se coïncide avec l'origine O de l'axe verticale ($O, \vec{k}$) et l'angle de rotation du disque est θ_0

Le cylindre s'écarte de sa position d'équilibre d'un angle θ , est soumis de la part du ressort à un couple de torsion, de moment $\mathcal{M}_c = -C.\theta$ avec $C = 12\text{N.m/rad}$



1. Écrire une équation donnant θ_0 , angle correspondant à la position d'équilibre du système
2. En appliquant la relation fondamentale de la dynamique système ,montrer que l'équation différentielle du mouvement s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{C}{J_{\Delta} + mr^2}\theta = 0$$

3. La solution de l'équation différentielle est la suivante $\theta(t) = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t + \varphi_0\right)$, Déterminer l'expression de la période propre T_0 des petites oscillations . Calculer sa valeur.

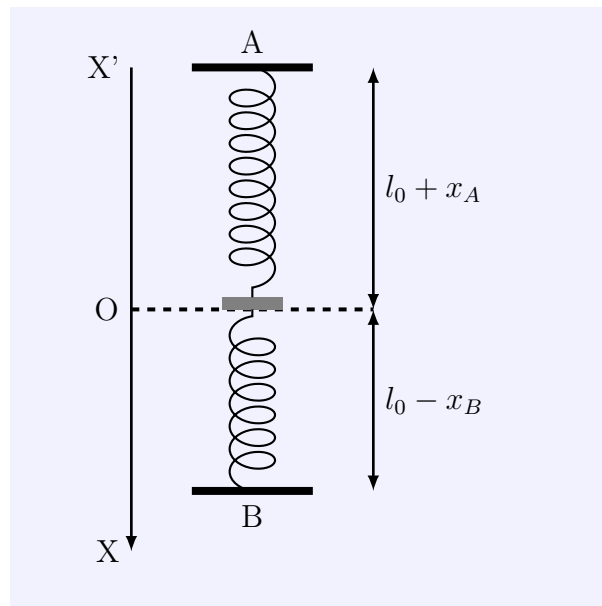
Exercice 4 :

Deux ressorts identiques de longueur l_0 , de raideur K , sont tendus entre deux points A

et B distant de L . Un disque D, de masse M et d'épaisseur négligeable, est fixé entre ces ressorts. voir figure.

On donne : $L = 45\text{cm}$; $l_0 = 15\text{cm}$; $K = 20\text{N/m}$; $g = 10\text{m/s}^2$ et $M = 0,1\text{kg}$

1. Déterminer la position d'équilibre du disque en déterminant x_A et x_B
2. Le disque est écarté de sa position d'équilibre verticalement, vers le bas de $d = 3\text{cm}$ et abandonné sans vitesse initiale.
 - a. Par une étude dynamique, donner l'équation différentielle du mouvement du disque (on choisira l'axe XX' comme sur la figure, son origine coïncidant avec la position d'équilibre)
 - b. En déduire l'équation horaire du mouvement de D
3. Retrouver l'équation horaire par une étude énergétique.



Exercice 5 : influence de la température et la longueur sur la période d'un pendule **

Un pendule est constitué par un tige métallique OA , de masse négligeable mobile autour d'un axe horizontal perpendiculaire à la tige passant par O . Sur l'extrémité A , on fixe une masse M supposée ponctuelle. Ce pendule est assimilable à un pendule simple de longueur $OA = l$, il effectue des oscillations de faible amplitude. Le pendule battant le seconde à 0°C ($T_0 = 2\text{s}$) en un lieu où $g_0 = 9,8\text{m/s}^2$.

1. Calculer la longueur $OA = l_0$ à cette température.
2. La température s'élève à 20°C . Quelle variation relative $\frac{\Delta T}{T_0}$ du pendule en résulte-t-il sachant que le coefficient de dilatation linéaire de la tige qui soutient la masse M est $\lambda = 1,85 \times 10^{-5}\text{S.I}$.

On donne la relation des dilatation des solide en fonction de la température en $^\circ\text{C}$ est :

$$l = l_0(1 + \lambda.\theta)$$

avec l_0 la longueur de la tige à la température $\theta^\circ C$ et pour $\varepsilon \ll 1$, nous avons l'approximation suivante : $(1 + \varepsilon)^n \approx 1 + n.\varepsilon$

3. Ce pendule constitue le balancier d'une horloge dont la marche est exacte à $0^\circ C$ (bat la seconde). Cette horloge avance-t-elle ou retarde-t-elle lorsque la température s'élève à $20^\circ C$? de combien dans un jour?

4. À la température $20^\circ C$ la longueur de la tige est l , on fixe une petite masse ponctuelle m au milieu de la tige. Calculer la nouvelle période de ce pendule composé en fonction de l, M, m et g .

On rappelle que le moment d'inertie d'une masse ponctuelle m distant de l'axe de rotation de d est $J_\Delta = md^2$

Montrer que la présence de m diminue la période propre du pendule.

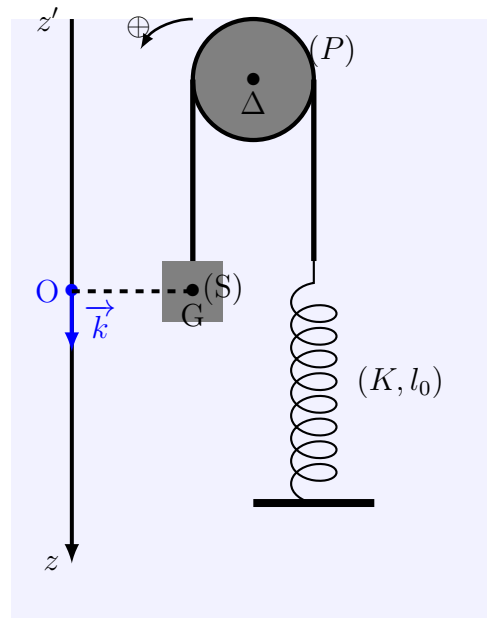
5. Quelle doit être la valeur de m pour que le pendule ainsi modifié bat rigoureusement la seconde à $20^\circ C$

Exercice 6 : détermination du moment d'inertie d'un cylindre d'une poulie homogène (P)

Le but de cet exercice est de déterminer le moment d'inertie J_Δ d'un cylindre d'une poulie homogène de rayon $r = 0,15m$ qui peut tourner autour de son axe Δ fixe.

On considère un ressort à spire non jointif de masse négligeable et de raideur K et sa longueur initiale est $l_0 = 0,2m$.

On relie l'extrémité mobile du ressort à un corps solide (S) de masse $m = 0,3kg$ par un fil inextensible et de masse négligeable passant par la gorge de la poulie (P) sans glissement.



1. À l'équilibre la longueur finale du ressort est $l = 0,25m$, déterminer l'expression du raideur du ressort et calculer sa valeur. 2. On écarte le corps (S) de sa position d'équilibre et on l'abandonne sans vitesse initiale.

2.1 En faisant une étude dynamique sur le système mécanique, établir l'équation différentielle du mouvement du centre d'inertie de (S).

2.2 Déterminer l'expression du moment d'inertie de la poulie (P) J_Δ en fonction de m, r, K et la période propre T des oscillations. 2.3 Calculer J_Δ sachant que la période propre $T = 0,49s$.