Calcul intégral

I) *Intégrale d'une fonction sur un segment.*

Définition : Soit f une fonction continue sur un intervalle [a ;b] et F une primitive de f sur [a ;b] .
Le nombre $F(b)-F(a)$ est appelé intégrale de a à b de f, on le note $\int_a^b f(x)dx$.

Notation: Par commodité, le nombre $F(b)-F(a)$ s'écrit aussi $\left[F(x)\right]_a^b$. C'est-à-dire: $\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b)-F(a)$

Conséquences : $\int_a^a f(x)dx = 0$ et $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

Propriété1 : Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle **I**, alors quel que soit l'élément a de **I**,
La fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f sur **I** qui s'annule en a.

II) Propriétés de l'intégrale.

Si f et g sont deux fonctions définies et **continues** sur un intervalle **I**, et a, b et c trois réels de **I**. et soit $k \in IR$.

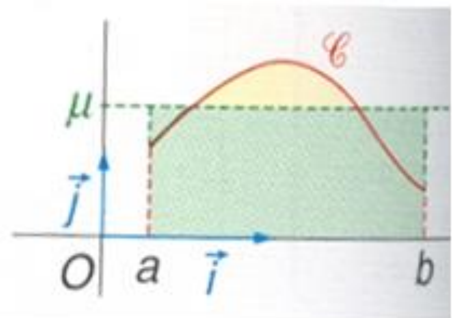
- ***Linéarité de l'intégrale***: $\int_a^b \left[f(x)+g(x)\right]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ et $\int_a^b k.f(x)dx = k.\int_a^b f(x)dx$
- ***Additivité ou relation de Chasles*** : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
- ***Positivité de l'intégrale*** : Si $f(x) \geq 0$ sur **I** et si $a \leq b$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
- ***Intégrale et ordre*** : Si $f(x) \leq g(x)$ sur **I** et si $a \leq b$, alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.
- ***Inégalité de la moyenne***: Si $m \leq f(x) \leq M$ sur **I** et si $a \leq b$, alors : $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.
- ***Valeur moyenne d'une fonction*** :

  Si $a < b$ alors le nombre $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ est appelé **valeur moyenne** de f sur l'intervalle $[a;b]$.

Remarques :

- La valeur moyenne de f est comprise entre m et M .
- Si le plan est rapporté à un repère orthonormé et si $f(x) \geq 0$ sur **I,**

alors μ est la hauteur du rectangle de base $b-a$ et d'aire : $\int_a^b f(x)dx$



III) Techniques de calcul d'une intégrale.

- ***Calcul d'une intégrale à l'aide d'une primitive.***
  La connaissance des primitives de fonctions usuelles permet de calculer des intégrales. **(Tableau page 14)**
- ***Intégration par parties:*** Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I.
  Alors $(uv)' = u'v + uv'$, donc $uv' = (uv)' - u'v$. Or une primitive de $(uv)'$ est uv ,
  d'où $\boxed{\int_a^b u'(x)\times v(x)dx = \left[u(x)\times v(x)\right]_a^b - \int_a^b u(x)\times v'(x)dx}$ **(Formule d'intégration par parties)**
- ***Décomposition de fractions en éléments simples.***
- ***Intégrale - Parité*** : Soit f une fonction continue sur un intervalle $[-a;a]$.

  Si f est **paire**, alors $\int_{-a}^a f(x)dx = -\int_0^a f(x)dx$ Si f est **impaire**, alors $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$
- ***Intégrale – Périodicité*** : Soit f une fonction continue et périodique sur **IR** de période T.
  Alors, quels que soient les réels a et b on a : $\int_{a+T}^{b+T} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$ et $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_b^{b+T} f(x)dx$
- ***Linéarisation des fonction trigonométrique.*** **(Nombres complexes)**

IV) Quelques applications du calcul intégral.

Aires de surfaces planes

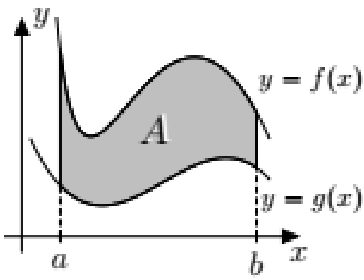
Supposons que le plan est muni d'un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

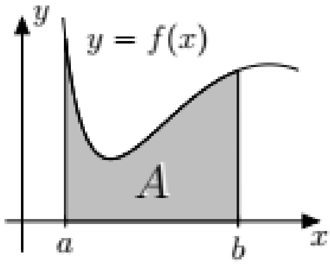
Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$.

L'aire de la surface délimitée par (C_f) , (C_g) et les droites $(D): x = a$ et $(\Delta): x = b$

Est égale à $\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$ (**unité d'aire**).

- *Cas particulier :* **L'aire** de la surface délimitée par (C_f) , l'axe des **abscisses** et les droites $(D): x = a$ et $(\Delta): x = b$ est $\int_a^b |f(x)|\,dx$ $(u.a)$
- **unité d'aire** = $\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|$





Volume d'un solide de révolution

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$.

En faisant pivoter la courbe de f autour de l'axe (Ox), on engendre un solide de révolution, dont

le **volume** est $\pi\int_a^b (f(x))^2\,dx$ (**unité de volume**)

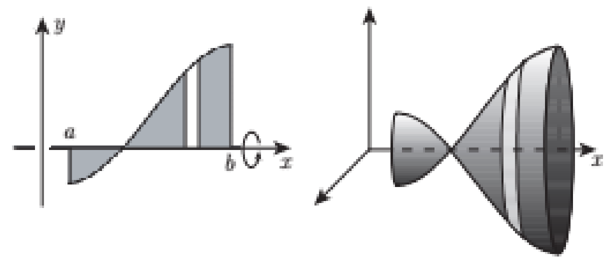
Remarques

1) f ne doit pas être nécessairement positive.

2) En intervertissant les rôles de x et de y, on obtient un solide de révolution engendré par une rotation autour de l'axe **(Oy)**

Dans ce cas, on a : $V=\pi\int_a^b (g(x))^2\,dx$ $(u.v)$

- **unité de volume**= $\|\vec{i}\|^3$



1) Déterminer la fonction correspondante au demi-cercle de rayon **r** et de centre l'origine du repère.

2) En utilisant les intégrales, en déduire la formule de l'aire d'un disque de rayon **r**.

3) En utilisant les intégrales de révolution, en déduire la formule du volume d'une sphère de rayon **r**.