Intégration d'une fonction continue sur un segment :

Définition :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, F une primitive de f sur I, a et b deux éléments de I. Le nombre réel $F(b)-F(a)$ est appelé l'intégrale de a à b de la fonction f et se note : $\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$.

Remarque :

Dans l'écriture $\int_a^b f(x)dx$, On peut remplacer la variable x par n'importe quelle autre.

(On dit que x est une variable muette), c'est-à-dire : $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(\theta)d\theta=....$

Propriété :

$$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx \quad ;; \quad \int_a^a f(x)dx=0.$$

Relation de chasles – linéarité de l'intégrale :

Relation de chasles :

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,c]$, et $b\in[a,c]$.

On a : $\int_a^c f(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx$.

Linéarité :

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$, et $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$.

On a : $\int_a^b (f+g)(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$ *Et* $\int_a^b \alpha\times f(x)dx=\alpha\times\int_a^b f(x)dx$

$$\int_a^b[\alpha.f(x)+\beta.g(x)]dx=\alpha.\int_a^b f(x)dx+\beta.\int_a^b g(x)dx.$$

Intégration par Parties :

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I telles que u' et v' sont continues sur un intervalle I. Soit a et b deux éléments de I.

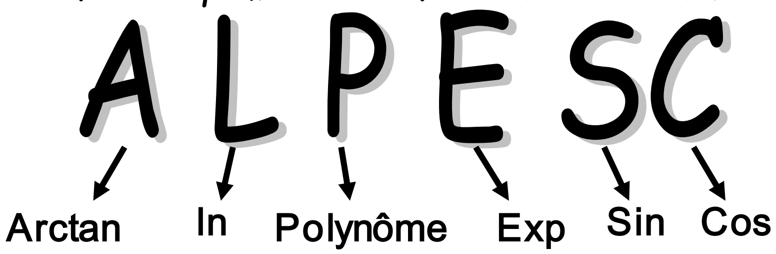
On a : $\int_a^b u'(x)\times v(x)dx=[u(x)\times v(x)]_a^b-\int_a^b u(x)\times v'(x)dx$.

Cette formule est appelée formule de l'intégration par parties.

Exemple :

En utilisant une intégration par parties ; Calculer $I=\int_1^e x\times\ln(x)dx$.

Pour déterminer la fonction primitive et la fonction dérivée en utilise la méthode suivante :



La première fonction dans ALPESC est une fonction primitive et la deuxième est une fonction dérivé.

Donc : On pose : $\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = x \end{cases}$ donc : $\begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v(x) = \dfrac{1}{2}x^2 \end{cases}$

U et v sont dérivable sur $[1;e]$, et u' et v' sont continues sur l'intervalle $[1;e]$, d'après la propriété de l'intégration par parties on a :

$$I = \int_1^e x \times \ln(x)dx = \left[\frac{1}{2}x^2 \times \ln x\right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{1}{2}x^2 \times \frac{1}{x}\right)dx = \left[\frac{1}{2}x^2 \times \ln x\right]_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e xdx$$

$$I = \left[\frac{1}{2}x^2 \times \ln x\right]_1^e - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^e = \left[\frac{1}{2}x^2 \times \ln x - \frac{1}{4}x^2\right]_1^e = \left(\frac{e^2}{2}\ln e - \frac{e^2}{4}\right) - \left(\frac{1}{2}\ln 1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{e^2+1}{4}$$

Donc : $I = \dfrac{e^2+1}{4}$.

Valeur moyenne :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soit a et b deux éléments de I tels que $a \prec b$.

- Le nombre réel $m = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ est appelé la valeur moyenne de f sur $[a,b]$.
- Il existe un réel c appartenant à $[a,b]$ tel que : $f(c) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

Calcul d'aires :

Propriété 1 :

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $[a,b]$. Soit $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

- L'aire de la partie du plan délimitée par la courbe $(\mathscr{C}_f)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x=a$ et $x=b$. Est le nombre réel $S = \left(\displaystyle\int_a^b |f(x)|dx\right)u.a$.

Propriété 2 :

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$. Et $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$ sont les courbe représentatives de f et g dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

- L'aire de la partie du plan délimitée par les courbes $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$, et les droites d'équations : $x=a$ et $x=b$. Est le nombre réel $S = \left(\displaystyle\int_a^b |f(x)-g(x)|dx\right)u.a$.

Calcul des volumes :

L'espace est rapporté à un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$.

- Le volume de solide de révolution engendré par la rotation de la courbe $(\mathscr{C}_f)$ autour de l'axe des abscisses : Est $V = \left[\displaystyle\int_a^b \pi(f(x))^2 dx\right]u.v$.

$u.a$: est l'unité d'aire ($u.a = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$) et $u.v$: est l'unité de volume ($u.v = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \times \|\vec{k}\|$).