Expression analytique du produit scalaire dans un repère orthonormé :

l'espace V_3 *muni d'un repère orthonormé directe* $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

Soient $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *deux vecteurs tel que :* $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ *et* $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}$.

- ✓ $\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'+zz'$
- ✓ $\vec{u}.\vec{v}=0 \Leftrightarrow \vec{u}\perp\vec{v}$

Norme d'un vecteur - distance entre deux points :

Soient $A\left(x_A,y_A,z_A\right)$ *et* $B\left(x_B,y_B,z_B\right)$ *deux points de l'espace.*

On a : $AB=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{\left(x_A-x_B\right)^2+\left(y_A-y_B\right)^2+\left(z_A-z_B\right)^2}$.

Equation cartésienne d'un plan définie par un point et un vecteur normal :

Soit $\vec{n}(a,b,c)$ *un vecteur non nul, et* $A\left(x_A,y_A,z_A\right)$ *un point de l'espace.*

L'ensemble des points M de l'espace qui vérifient : $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$, *est le plan* (P) *passant par A et de vecteur normal* $\vec{n}$. *Une équation cartésienne de ce plan, s'écrit sous la forme :* $ax+by+cz+d=0$ *ou d est un nombre réel.*

Distance d'un point à un plan :

Soit (P) *plan d'équation cartésienne :* $ax+by+cz+d=0$ *et* $A\left(x_A,y_A,z_A\right)$ *un point de l'espace. La distance du point A au plan* (P) *est :* $d\left(A;(P)\right)=\dfrac{\left|ax_A+by_A+cz_A+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Exemple :

Calculons la distance du point $A(-1,1,2)$ *au plan* (P) *d'équation* $x-2y-2z+4=0$.

On a : $d\left(A;(P)\right)=\dfrac{\left|x_A-2y_A-2z_A+4\right|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}}=\dfrac{|-3|}{\sqrt{9}}=1$.

donc : $d\left(A;(P)\right)=1$

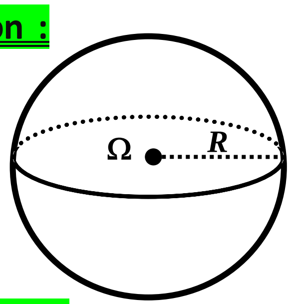
Etude analytique de la sphère :

Equation cartésienne d'une sphère définie par le centre et le rayon :

Une équation de la sphère (S) *de centre* $\Omega(a,b,c)$ *et de rayon* R *avec* $(R\succ 0)$. *Est :*

$\left(x-a\right)^2+\left(y-b\right)^2+\left(z-c\right)^2=R^2$ *que l'on peut écrire :*

$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$ *ou* $d=a^2+b^2+c^2-R^2$.



Equation cartésienne d'une sphère définie par l'un de ces diamètres :

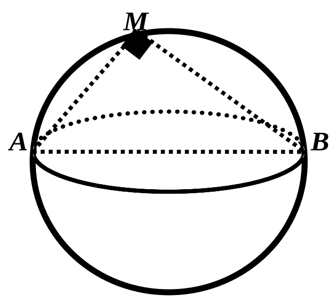
Soit A et B deux points de l'espace tel que : $(A\neq B)$.

L'ensemble des points M de l'espace tels que : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$ *est la sphère dont* $[AB]$ *est l'un de ces diamètres.*

Une équation cartésienne de cette sphère est :

$\left(x-x_A\right)\left(x-x_B\right)+\left(y-y_A\right)\left(y-y_B\right)+\left(z-z_A\right)\left(z-z_B\right)=0$

avec $A\left(x_A,y_A,z_A\right)$ *et* $B\left(x_B,y_B,z_B\right)$.



Etude de analytique de l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels que : $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$.

Soit a, b, c et d quatre nombres réels tels que $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ et (S) l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace qui vérifient : $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$.

$$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0 \Leftrightarrow x^2+ax+y^2+by+z^2+cz+d=0$$

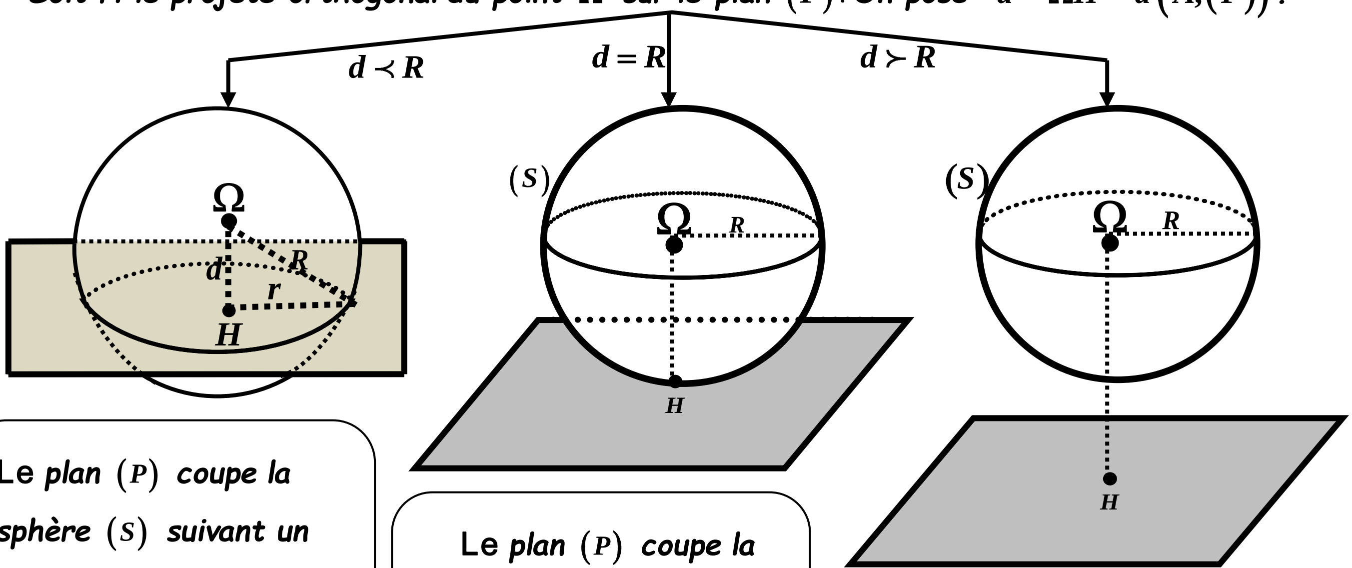
$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(z+\frac{c}{2}\right)^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2+d=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2+\left(z+\frac{c}{2}\right)^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2-d$$

- **Si :** $\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2-d\succ 0$: *l'ensemble des points $M(x,y,z)$ est la sphère (S) de centre $\Omega\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2},-\frac{c}{2}\right)$ et rayon* $R=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2-d}$.
- **Si :** $\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2-d=0$: (S) *est l'ensemble* $\left\{\Omega\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2},-\frac{c}{2}\right)\right\}$.
- **Si :** $\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2-d\prec 0$: (S) *est l'ensemble vide.*

Intersection d'une sphère $S(\Omega,R)$ et un plan (P): $ax+by+cz+d=0$:.

Soit H le projeté orthogonal du point Ω sur le plan (P). On pose $d=\Omega H=d(A;(P))$.



Le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle de centre H et de rayon $r=\sqrt{R^2-d^2}$.

Le plan (P) coupe la sphère (S) en un point H. On dit que (P) est tangent à la sphère (S).

Le plan (P) ne coupe pas la sphère (S). On dit que (P) est à l'extérieur de la sphère (S).

Remarque :

Pour déterminer les coordonnées du point H, on résoudre le système d'équation du plan (P) et la représentation paramétrique droite (D), tel que (D) est la droite passant par Ω et orthogonale au plan (P).

↳ Expression analytique du produit vectoriel dans un repère orthonormé direct :

l'espace V_3 *est muni d'une base orthonormé directe* $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

Soit $\vec{u}(x,y,z)$ *et* $\vec{v}(x',y',z')$ *deux vecteurs de l'espace.*

- ✓ $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{w}$ *tel que :* $\vec{u}\perp\vec{w}$ *et* $\vec{v}\perp\vec{w}$.
- ✓ $\vec{u}\wedge\vec{v}=-\left(\vec{v}\wedge\vec{u}\right)$.
- ✓ $\vec{u}\wedge\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\vec{u}\wedge\vec{v}+\vec{u}\wedge\vec{w}$.
- ✓ $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{0} \Leftrightarrow$ *Les points A, B et C sont alignés.*
- ✓ $\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}y & y'\\z & z'\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}x & x'\\z & z'\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}x & x'\\y & y'\end{vmatrix}\vec{k}$.

↳ L'aire d'un triangle – l'aire d'un parallélogramme :

- ✓ *Soit ABC un triangle, son aire est :* $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|$.
- ✓ *Soit ABCD un parallélogramme, son aire est :* $S_{ABCD}=\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|$.

↳ Distance d'un point à une droite :

Soit (D) *la droite dirigé par* $\vec{u}(a,b,c)$ *et passant par* $A(x_A,y_A,z_A)$ *et* M *un point de l'espace.*

La distance du point M et la droite (D) *est :* $d\left(M;D\left(A,\vec{u}\right)\right)=\dfrac{\left\|\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|}$.

Si les points A, B et C ne sont pas alignés, donc le vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ *est orthogonale au plan* (ABC). *Dans ce cas l'équation du plan* (ABC) *s'écrit sous la forme :*

$M\in(ABC)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}.\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)=0$