

## Limites et continuité

### 1 la continuité en un point.

#### Définition :

soient  $f$  une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert  $I$  et  $a \in I$ .  
On dit  $f$  est continue en  $a$  si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

#### Définition :

soit  $f$  une fonction numérique définie sur un intervalle de type  $[a, b]$ .

★ On dit que  $f$  est continue à droite en  $a$  si  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ .

★ On dit que  $f$  est continue à gauche en  $b$  si  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$ .

#### Proposition :

$f$  est continue en  $a \Leftrightarrow f$  est continue à droite et à gauche en  $a$

#### Remarque :

la partie entière n'est pas continue en tout  $n$  de  $\mathbb{Z}$ .

### 2 la continuité sur un intervalle.

#### Définition :

★ on dit que  $f$  est une fonction continue sur un intervalle ouvert  $I$  s'elle est continue en tout point de  $I$ .

★ on dit que  $f$  est une fonction sur un intervalle  $[a, b]$  s'elle est continue sur  $]a, b[$ , continue à droite en  $a$  et continue à gauche en  $b$ .

#### Remarques :

★ la partie entière est continue sur l'intervalle  $[n, n + 1[$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{Z}$ .

★ si  $f$  est continue sur un intervalle  $I$  alors elle est continue sur tout intervalle  $J \subset I$ .

#### Proposition :

Les fonctions polynomiales, les fonctions rationnelles, les fonctions :  $x \mapsto \sqrt{x}$ ,  $x \mapsto \sin x$  et  $x \mapsto \cos x$  sont continues sur leur domaine de définition.

### 3 Les opérations sur les fonctions continues.

#### Proposition :

soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur un intervalle  $I$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

★ les fonctions  $f + g$ ,  $\lambda f$  et  $f \times g$  sont continues sur  $I$ .

★ si de plus  $g$  ne s'annule pas sur  $I$ , alors les fonctions  $\frac{1}{g}$  et  $\frac{f}{g}$  sont continues sur  $I$ .

#### Proposition :

★ si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions continues sur  $I$  et  $J$  respectivement avec  $f(I) \subset J$ , alors  $g \circ f$  est continue sur  $I$ .

★ soient  $I$  un intervalle ouvert,  $a \in I$ ,  $f$  une fonction définie sur  $I$  avec  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \in \mathbb{R}$  et  $g$  est une fonction continue sur  $J$  avec  $f(I) \subset J$  alors  $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = g(l)$ .

#### 4 L'image d'un intervalle par une fonction continue

##### Proposition :

- ★ l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.
- ★ l'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

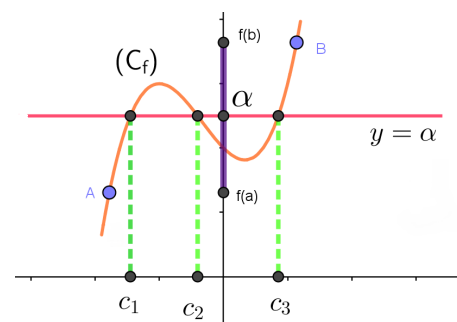
$I$	$f(I)$ si $f$ est continue et str ↗	$f(I)$ si $f$ est continue et str ↘
$[a, b]$	$[f(a), f(b)]$	$[f(b), f(a)]$
$]a, b]$	$] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x), f(b)]$	$[f(b), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)[$
$[a, b[$	$[f(a), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)[$	$] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x), f(a)]$
$]a, b[$	$] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)[$	$] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)[$
$[a, +\infty[$	$[f(a), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[$	$] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(a)]$
$]a, +\infty[$	$] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[$	$] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)[$
$] -\infty, b]$	$] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(b)]$	$[f(b), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)[$
$] -\infty, b[$	$] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)[$	$] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)[$
$] -\infty, +\infty[$	$] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[$	$] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)[$

#### Théorème des valeurs intermédiaires

##### Théorème :

soient  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$  et  $a, b \in I$ .

Pour tout  $\alpha$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , il existe au moins un  $c$  compris entre  $a$  et  $b$  tel que  $f(c) = \alpha$ .  
(autrement l'équation  $f(x) = \alpha$  admet au moins une solution)



##### Corollaire :

soit  $f$  une fonction continue et strictement monotone sur  $[a, b]$ .

Pour tout  $\alpha$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , il existe au moins un unique  $c \in [a, b]$  tel que  $f(c) = \alpha$ .  
(autrement l'équation  $f(x) = \alpha$  admet une unique solution sur  $[a, b]$ )

##### Corollaire :

soit  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$  telle que  $f(a) \times f(b) < 0$ . Alors :

- ★ l'équation  $f(x) = 0$  admet au moins une solution  $\alpha \in ]a, b[$ .
- ★ si de plus  $f$  est strictement monotone, l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha \in ]a, b[$ .

##### La méthode de dichotomie :

Le but de cette méthode est d'approcher la solution d'une équation de type  $f(x) = 0$ .

Si  $f$  est continue et strictement monotone sur  $[a, b]$  telle que  $f(a) \times f(b) < 0$ , alors  $\exists ! \alpha \in ]a, b[ / f(\alpha) = 0$ .

On a deux cas :

★ si  $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \times f(b) < 0$  alors  $\alpha \in \left] \frac{a+b}{2}, b \right[$ .

★ si  $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \times f(a) < 0$  alors  $\alpha \in \left] a, \frac{a+b}{2} \right[$ .

On continue de cette manière jusqu'à l'encadrement demandé de  $\alpha$ .

### 5 La fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone.

#### Définition :

soient  $f$  une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle  $I$  et  $J = f(I)$ .  
La fonction qui lie chaque élément  $y$  de  $J$  avec l'unique élément  $x$  de  $I$  tel que  $f(x) = y$  s'appelle la fonction réciproque de  $f$  notée  $f^{-1}$ .

#### Conséquences :

soient  $f$  une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle  $I$  et  $f^{-1}$  sa réciproque. On a :

$$\star \begin{cases} f^{-1}(x) = y \\ x \in f(I) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases} \quad \star (\forall x \in I) : (f^{-1} \circ f)(x) = x \quad \star (\forall x \in f(I)) : (f \circ f^{-1})(x) = x$$

#### Proposition :

soient  $f$  une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle  $I$  et  $f^{-1}$  sa réciproque. On a :

★  $f^{-1}$  est continue sur  $f(I)$ .

★  $f^{-1}$  est strictement monotone sur  $f(I)$  avec  $f$  et  $f^{-1}$  ont la même monotonie.

★  $(C_{f^{-1}})$  est symétrique à  $(C_f)$  par rapport à la droite d'équation  $y = x$  dans un repère orthonormé.

### 6 La fonction racine $n^{\text{ième}}$ .

#### Proposition :

soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $x \mapsto x^n$  est continue et strictement croissante sur  $[0, +\infty[$ . Alors elle admet une fonction réciproque sera noté  $\sqrt[n]{\phantom{x}}$ .

#### Conséquences :

$$\star \begin{array}{ccc} \sqrt[n]{\phantom{x}} : & [0, +\infty[ & \rightarrow & [0, +\infty[ \\ & x & \rightarrow & \sqrt[n]{x} \end{array}$$

$$\star (\forall x, y \in [0, +\infty]) : \sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow x = y^n$$

$$\star (\forall x \in [0, +\infty]) : (\sqrt[n]{x})^n = \sqrt[n]{x^n} = x$$

#### Définition :

Si  $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$  avec  $q \in \mathbb{N}^*$  et  $p \in \mathbb{Z}$ , on pose

$$(\forall x \in ]0, +\infty[) : x^r = \sqrt[q]{x^p}$$

#### Propriétés :

★ La fonction  $x \mapsto x^r$  est continue sur  $]0, +\infty[$ , pour tout  $r \in \mathbb{Q}$ .

★ pour tout  $r, r' \in \mathbb{Q}$  et pour tout  $x, y \in ]0, +\infty[$  on a :

$$x^r > 0 \quad ; \quad x^{r+r'} = x^r \times x^{r'} \quad ; \quad x^{rr'} = (x^r)^{r'} \quad ; \quad \frac{1}{x^r} = x^{-r}$$

$$\frac{x^r}{x^{r'}} = x^{r-r'} \quad ; \quad (xy)^r = x^r y^r \quad ; \quad \left(\frac{x}{y}\right)^r = \frac{x^r}{y^r} \quad ;$$

$$\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = \frac{x - y}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}} \quad \sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y} = \frac{x - y}{(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y})(\sqrt[4]{x^2} + \sqrt[4]{y^2})}$$

## 7 La fonction arctan.

### Proposition :

La fonction  $x \mapsto \tan(x)$  est continue et strictement croissante sur  $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ . Alors elle admet une fonction réciproque sera noté **arctan**.

### Propriétés :

★ La fonction  $x \mapsto \arctan(x)$  est continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

★  $(\forall x \in \mathbb{R}) : \tan(\arctan(x)) = x$

★  $\left(\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[ \right) : \arctan(\tan(x)) = x$

★  $(\forall x \in \mathbb{R}); \left(\forall y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[ \right) : \arctan(x) = y \iff x = \tan(y)$

★  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$        $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$        $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x)}{x} = 1$

★ la courbe  $(C_{\arctan})$  :

